VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
EKONOMICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATICKÝCH METOD V EKONOMICE

Využití diferenčních rovnic k modelování v ekonomii

Applications of Difference Equations in Economic Models

Student: Jan Manďák
Vedoucí bakalářské práce: PaedDr. Renata Majovská, PhD.

Ostrava 2011

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Ekonomická fakulta
Kat. matematických metod v ekonomice

Zadání bakalářské práce

Student: **Jan Manďák**

Studijní program: B6234 Kvantitativní metody a rozhodování v ekonomice

Studijní obor: 6207R015 Metody řízení a rozhodování v ekonomice

Téma: Využití diferenčních rovnic k modelování v ekonomii
Applications of Difference Equations in Economic Models

Zásady pro vypracování:

1. Úvod
2. Dynamické modely v ekonomii
3. Lineární diferenční rovnice
4. Diferenční rovnice v dynamických modelech v mikroekonomii
5. Diferenční rovnice v dynamických modelech v makroekonomii
6. Závěr

Seznam použité literatury
Seznam zkratek
Prohlášení o využití výsledků bakalářské práce
Přílohy

Seznam doporučené odborné literatury:

ALLEN, R. G. D. *Matematická ekonomie*. Přel. M. Černý. 1. vyd. Praha: Academia, 1971. 782 s.
CHIANG, A. C. *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2005. 788 s. ISBN 0-07-010813-7.
SAMPSON, M. Introduction to Mathematical Economics: Part 2. *Loglinear Publications* [online]. 2001, [cit. 2001-01-02]. Dostupný z WWW:<http://www.loglinear.com/>.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **PaedDr. Renata Majovská, PhD.**

Datum zadání: 26.11.2010
Datum odevzdání: 11.05.2011

doc. RNDr. Dana Šalounová, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. Dr. Ing. Dana Dluhošová
děkanka fakulty

„Místopřísežně prohlašuji, že jsem celou práci, včetně všech příloh, vypracoval samostatně“.

V Ostravě dne 11. 5. 2011 Jan Manďák

Na tomto místě bych rád poděkoval zejména vedoucí mé bakalářské práce PaedDr. Renatě Majovské, PhD. za trpělivost, cenné rady, připomínky a čas, který mi věnovala.

Obsah

Úvod

Dynamické modely zkoumají a popisují chování a vývoj sledovaných veličin v čase. Významným matematickým prostředkem využívaným v dynamických modelech jsou diferenciální a diferenční rovnice. Tyto rovnice se v dynamických modelech ve fyzice používaly již v 17. století. Do povědomí v ekonomických vědách vešly diferenciální a diferenční rovnice v první polovině 20. století při sledování jednoduchých dynamických ekonomických modelů.

Z uvedených dvou matematických prostředků v této bakalářské práci používáme diferenční rovnice, které popisují diskrétní dynamické modely a které vystihují přirozené procesy v ekonomice.

V literatuře jsou nejčastěji uváděny nespojité dynamické tržní modely v mikroekonomii, které modelují chování jedinců na trhu, a modely multiplikátoru a akcelerátoru v makroekonomii.

Podrobně jsou popisovány modely, které využívají diferenční rovnice 1. řádu, ovšem s jistým omezením ekonomické veličiny, která v rovnici vystupuje na pravé straně.

Modely v prostudované literatuře nevyužívají reálná data, proto v práci ověřujeme věrohodnost použitých matematických modelů na aktuálních datech z databáze časových řad ARAD České národní banky (http://www.cnb.cz/docs/ARADY/HTML/index.htm).

V matematické části této práce předpokládáme základní znalosti z teorie posloupností a teorie diferenčních rovnic, v ekonomické části základní znalosti mikroekonomie a makroekonomie.

1 Dynamické modely v ekonomii

V první kapitole této práce uvádíme základní teoretická východiska týkající se dynamických modelů. Jsou citovány tři definice dynamického modelu, jedna z české a dvě ze zahraniční literatury. Podrobně je definována ekonomická rovnováha, která je v ekonomických modelech důležitým pojmem, protože představuje ideální stav, jakého můžeme za daných podmínek dosáhnout. Dále jsou popsány etapy, kterými při ekonomicko-matematickém modelování procházíme. V závěru kapitoly jsou analyzovány různé druhy zpoždění, jakožto základní rys dynamických modelů.

Dynamické modely zkoumají vývoj sledovaných veličin v čase, odchylky od rovnovážného stavu nebo pohyby v jeho okolí. Chiang (1997, str. 435) považuje při definici dynamického modelu za důležité, jak pohlížíme na čas: *„Pojem dynamiky v ekonomické analýze měl v různých obdobích a pro různé ekonomy různé významy. Významný rys dynamické analýzy je datování proměnných, což představuje jednoznačný pohled na čas. Tento pohled může být dvojí: čas může být považován jako spojitá nebo jako diskrétní (nespojitá) proměnná. V prvním případě se proměnná mění v každém bodě v čase, zatímco v druhém případě proměnná podstupuje změnu jen jednou za určité časové období. V určitých souvislostech bude více odpovídat první přístup, v jiných přístup druhý.“* Podobně jako Chiang definují dynamický model Fiala, Dlouhý (2006, str. 13): *„Dynamické modely zahrnují čas v procesu řešení modelu. Čas může být zachycen jako diskrétní nebo spojitá veličina. V prvním případě se hodnoty proměnných mění jen v předem daných obdobích (den, měsíc, čtvrtletí, rok), v druhém případě se hodnoty proměnných mění průběžně v každém okamžiku.“* Gandolfo (2005, str. 1) vidí podstatu dynamických modelů ve funkcionálních rovnicích: *„Systém nazýváme dynamickým tehdy, jestliže jeho chování v čase je určeno funkcionálními rovnicemi, ve kterých jsou proměnné v různých časových obdobích zapojeny důležitým způsobem“.*

1.1 Rovnováha v ekonomice

Rovnováha je v ekonomickém modelování velmi důležitým pojmem. Modely, které zkoumají, zda se systém dostane do rovnováhy, tzn., že hodnoty sledované proměnné Y_t se v čase t budou limitně blížit rovnovážné hodnotě Y^*, popisujeme rovnicí

$$\lim_{t \to \infty} Y_t = Y^* \tag{1.1}$$

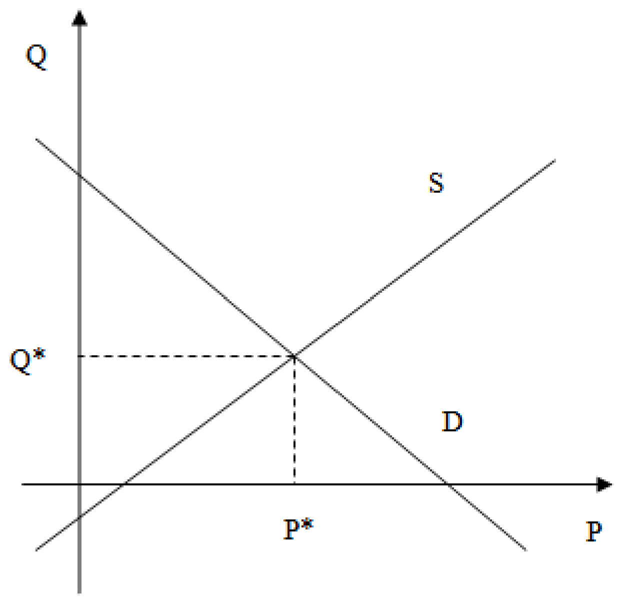
a nazýváme je modely konvergentní. Opačným případem jsou modely divergentní, kdy se hodnoty sledované proměnné Y_t od rovnovážné hodnoty vzdalují.

V prostudované literatuře jsou popisovány modely, ve kterých se sledovaná proměnná Y_t přibližuje ke konstantní rovnovážné hodnotě Y^*. Protože i rovnovážná hodnota se může v čase měnit, je nutno se zabývat i modely, kdy se proměnná Y_t přibližuje ke spojité funkci ve spojitých modelech, resp. k posloupnosti v diskrétních (nespojitých) modelech. Soukup (2007) považuje pohled na ekonomiku v krátkém a dlouhém období jako statický. Přístup, který používáme v celé této práci, tedy přístup dynamický, uvažuje až ve velmi dlouhém období. Jedním z předpokladů velmi dlouhého období je, že se v národním hospodářství mění výše úspor a investic. Tento předpoklad odpovídá modelu, který popisujeme ve čtvrté kapitole a ve kterém uvažujeme, že se autonomní výdaje, jejichž součástí jsou i investice, v čase mění.

Ekonomická rovnováha může být, stejně jako jiné ekonomické termíny, definována různými způsoby. Machlup (1991, str. 54) definuje rovnováhu jako "*takové sestavení vybraných vzájemně souvisejících proměnných, že v modelu, vytvořeném z těchto proměnných, nepřevládá žádná zásadní tendence ke změně*". Rozbor této definice si zaslouží zvláštní pozornost. Slovo "vybraných" podtrhuje fakt, že existují proměnné, které nebyly do modelu zahrnuty. Diskuze o rovnováze jsou proto relevantní pouze v tom případě, uvažujeme-li, že v modelu jsou důležité pouze námi zvolené proměnné. Pokud je model rozšířen o další proměnnou, rovnovážný stav týkající se předchozího modelu již nebudeme moci používat. Při definování rovnováhy je důležité, aby klidový stav byl založen pouze na vyvažování vnitřních vlivů v modelu, zatímco vnější faktory (např. mezní sklon ke spotřebě nebo sklony poptávkové a nabídkové funkce) předpokládáme fixní. To znamená, že parametry a vnější proměnné považujeme za konstanty. Změna vnějších faktorů může vyústit v novou rovnováhu, definovanou na základě nových hodnot parametrů. Při definování nové rovnováhy předpokládáme, že nové hodnoty parametrů zůstanou opět neměnné.

Podobně jako Machlup definuje rovnováhu Samuelson (1995, str. 979): „*Rovnováha (equilibrium) je stav, ve kterém je ekonomická jednotka v klidu nebo ve kterém jsou síly, jež na ni působí, v rovnováze, takže neexistuje žádná tendence ke změně“.*

Rovnováhu v mikroekonomii definujeme jako průsečík nabídky a poptávky po určitém zboží na dílčím trhu, makroekonomickou rovnováhu pak jako průsečík agregátní nabídky a agregátní poptávky v celé ekonomice.



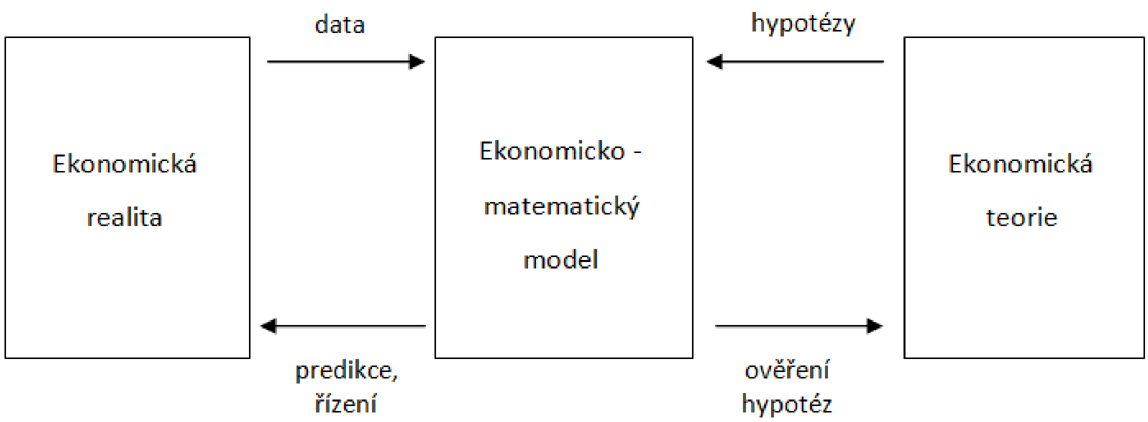
Obr. 1.1: Ekonomická rovnováha

Rovnováha v určitém modelu je v podstatě situace, která je charakterizována nedostatkem podnětů ke změně. Fakt, že v rovnováze není žádný podnět ke změně, svádí k závěru, že rovnováha nutně představuje žádoucí nebo ideální stav. Tento závěr však není zaručený. Určitá rovnovážná pozice může představovat žádoucí stav a něco, čeho chceme dosáhnout, např. z pohledu firmy situace, ve které chceme maximalizovat zisk. Jiná rovnovážná situace nemusí být až tak žádoucí a chtěli bychom se jí vyhnout, např. dosahujeme-li v rovnovážné situaci zisku menšího, než jsme plánovali. Jediná zaručená interpretace je, že rovnováha je situace, která, pokud je jí dosaženo, by měla mít tendenci sama se udržovat, nenastanou-li změny vnějších sil, které na tuto rovnováhu působí.

Chiang (1993) rozlišuje dvě různá pojetí rovnováhy. První, kterou označujeme jako „goal equilibrium“, spadá pod optimalizační problémy. Druhé pojetí, označené jako „nongoal equilibrium“, nevychází z vědomých cílů (např. maximalizace zisku, minimalizace nákladů) a nesnaží se dosáhnout konkrétního cíle, ale z procesu vzájemného působení a přizpůsobování ekonomických sil. Takovýmto příkladem je rovnováha dosažená na trhu při dané poptávce a nabídce či rovnováha národního důchodu při daných spotřebních výdajích a investicích. Ve své práci se zabývám modely rovnováhy druhého typu, označené jako „nongoal equilibrium“.

1.2 Etapy při tvorbě matematického modelu

Model je zjednodušením reálného systému. Zobrazuje pouze ty vlastnosti systému, které jsou podstatné z hlediska řešení daného problému. Pomocí matematického modelu se dají vytvářet analogické, ale podstatně jednodušší situace, podobající se skutečnosti. Přesnost těchto vytvořených analogických situací závisí na ekonomických předpokladech (nakolik zjednodušení skutečného systému ovlivní výsledky daného problému) a také na kvalitě vstupních údajů. Ekonomicko – matematický model je prostředníkem mezi ekonomickou teorií a ekonomickou realitou. Ekonomická teorie vytváří hypotézy, které je nutno ověřit. Z ekonomické reality získáváme údaje o hodnotách ekonomických veličin. Pomocí modelu ověřujeme hypotézy o ekonomické realitě a využíváme jej i pro predikci ekonomických veličin. Fiala, Dlouhý (2006) zobrazují vztah mezi realitou, modelem a teorií i graficky:



Obrázek 1.2: Ekonomická realita, teorie a model

Základní otázkou, kterou si klademe při vytváření ekonomických modelů, je, zda existuje za daných podmínek řešení modelu. Dále nás zajímá, jestli systém za daných podmínek dosáhne rovnováhy a je-li rovnovážný stav jenom jeden nebo jich je více. Důležitá je stabilita rovnováhy, sledujeme, zda se systém dostane znovu do rovnovážného stavu, pokud se z něj vychýlíme. V neposlední řadě zkoumáme existenci cyklů.

Tvoříme-li ekonomicko-matematický model, procházíme několika na sebe vzájemně navazujícími etapami:

1. Analýza ekonomického problému: zkoumaný objekt považujeme za složitý systém, účelově definovanou množinu prvků a vazeb mezi nimi, které určují vlastnosti celku. Do modelu vybereme ty prvky systému, které jsou pro řešení daného problému důležité. Dále musíme vymezit vstupy a výstupy systému, jeho strukturu a okolí.
2. Sestavení matematického modelu: verbální vymezení systému nahradíme matematickým modelem. Vazby mezi prvky daného systému vyjádříme pomocí matematických prostředků, většinou pomocí rovnic, nerovnic, funkčních závislostí. Do připraveného modelu vložíme data.
3. Řešení modelu: pomocí existujícího algoritmu nebo nově navrženého postupu výpočtu nalezneme řešení daného problému. Při řešení modelu je vhodné využití výpočetní techniky. V této etapě ověřujeme správnost modelu i výsledků, tzn., že zjišťujeme, zda lze daným modelem popsat vztahy v reálném ekonomickém systému. Při nesrovnalostech provedeme korekci modelu.
4. Interpretace výsledků: získané výsledky upravíme tak, aby byly srozumitelné tomu, kdo problém zadával. Správná interpretace je velice důležitá při využití modelu v praxi.
5. Realizace výsledků: zjištěné výsledky zavedeme do praxe. Správně vypočtené a interpretované výsledky mohou výrazně napomoci při řešení daného problému.

Ve své práci postupuji podle bodů 1. – 4.

1.3 Klasifikace dynamických modelů

Pro vytváření ekonomicko-matematických modelů je v současné době k dispozici řada matematických prostředků. Určení, do jaké kategorie matematický model spadá, nám umožní snadněji rozpoznat základní vlastnosti modelu. Dynamické modely třídíme podle různých hledisek.

Podle povahy použitých matematických prostředků dělíme modely na:

- lineární – závislosti mezi veličinami, které charakterizují zobrazovaný jev, se dají vyjádřit pomocí lineárních funkcí,
- nelineární – závislosti mezi veličinami, které charakterizují zobrazovaný jev, vyjadřujeme pomocí nelineárních funkcí, především kvadratických, exponenciálních a logaritmických.

Výhodou lineárních modelů je jejich jednoduchost, což je důležité pro aplikaci modelů v praxi. Ve skutečnosti však vztahy mezi veličinami nemusí být, a mnohdy nejsou, přesně lineární. Při konstrukci modelů je nutné zkoumat, jak dalece ovlivňuje správnost výsledku okolnost, že skutečné vztahy se určitou mírou odchylují od předpokládané linearity. I když existují výjimky, nelineární modely mají tendenci být složitější než modely lineární. Běžný přístup k nelineárním problémům je jejich linearizace, to je však problematické při studiu takových situací, které jsou silně vázány na nelinearitu.

Podle toho, jak pohlížíme na čas, rozlišujeme modely:

- nespojité (diskrétní) – máme-li údaje potřebné k sestavení modelu pouze pro určité časové okamžiky, tzn., že čas považujeme za proměnnou, která nabývá konečného počtu hodnot, např. $t = 1,\ 2,\ ...,\ T$,
- spojité – čas t považujeme za proměnnou, která probíhá všechny hodnoty z určitého intervalu, např. $\langle 0, T \rangle$,
- smíšené – v modelech se vyskytují proměnné obou typů.

Úhrnná hodnota časové proměnné veličiny $x(t)$ se v nespojitých modelech vypočte jako

$$X = \sum_{t=1}^{T} x(t). \tag{1.2}$$

Změny této veličiny v čase jsou charakterizovány pomocí diference

$$\Delta x(t) = x(t+1) - x(t). \tag{1.3}$$

Ve spojitých modelech použijeme místo sumy integrál

$$X = \int_0^T x(t)dt \tag{1.4}$$

a místo diference derivaci

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \tag{1.5}$$

Využití diskrétních modelů v ekonomii je opodstatněné. Makroekonomické údaje, jako např. spotřební výdaje domácností, hrubý domácí produkt či nezaměstnanost jsou zveřejňovány měsíčně, čtvrtletně, resp. ročně. Podobně i mikroekonomické údaje, jako např. hospodářské výsledky firem, jsou zveřejňovány vždy ke konci účetního období.

Podle povahy předpokládaných vztahů, které charakterizují zkoumaný jev, rozdělujeme modely na:

- deterministické – předpokládáme, že tyto vztahy jsou určité (determinované), tzn., že určité hodnotě jedné veličiny je přiřazena určitá hodnota závislé veličiny,
- stochastické – předpokládáme, že tyto vztahy jsou náhodné (stochastické), tzn., že určité hodnotě jedné veličiny odpovídají různé hodnoty závislé veličiny, ale vždy s určitými pravděpodobnostmi.

Podle toho, zda závisejí na paměti, rozlišujeme modely:

- bez paměti – stav modelu nezávisí na minulých hodnotách,
- s pamětí – stav v následujícím časovém okamžiku závisí na současném stavu i na stavu v nějakém minulém okamžiku, příp. na vývoji modelu v minulosti.

Podle oblasti, kde se využívají, dělíme modely na:

- mikroekonomické – tj. modely, jež zobrazují chování dílčích ekonomických subjektů,
- makroekonomické – zachycují chování ekonomického systému jako celku.

1.4 Časová zpoždění v dynamických modelech

Časová zpoždění jsou základním rysem dynamických modelů. Tato zpoždění mohou být různých typů a mohou nabývat různých forem. Základní rozdělení zpoždění je na zpoždění nespojité a spojité.

Nespojitý přístup

Proměnné X a Y analyzujeme v jistém období t, proto jim přiřadíme indexy t $(t = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ )$, čas zde vystupuje jako vnitřní proměnná. Např. označení X_2 značí hodnotu proměnné X ve druhém období. Jestliže proměnná Y závisí na X a tato závislost je lineární, pak platí:

$$Y_t = \alpha + aX_t .$$

V takovém případě zpoždění neexistuje. Chceme-li vyjádřit zpoždění jako odklad o pevnou dobu T (časová konstanta zpoždění), kdy T je pevně dané celé kladné číslo, vyjádříme to vztahem

$$Y_t = \alpha + aX_{t-T} , \tag{1.6}$$

který vyjadřuje hodnotu proměnné Y v závislosti na hodnotě, kterou nabyla proměnná X právě o T období dříve. Při vytváření konkrétních nespojitých dynamických modelů hraje časová konstanta T důležitou roli, neboť pomocí ní určíme řád diferenční rovnice. V ekonomii se nejčastěji setkáme se zpožděním o jedno (T = 1) nebo dvě (T = 2) období. Tato dvě typická zpoždění vyjádříme vztahy

$$Y_t = \alpha + aX_{t-1} ,$$

$$Y_t = \alpha + aX_{t-2} .$$

Dalším typem zpoždění je tzv. rozložené zpoždění, které vyjádříme vztahem

$$Y_t = \alpha + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + a_3 X_{t-3} + \dots , \tag{1.7}$$

přičemž

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots ,$$

kde Y_t nezávisí pouze na jedné předcházející hodnotě proměnné X, ale na celé posloupnosti takových hodnot. Váhové koeficienty $a_1, a_2, a_3, \dots$ v lineárním vztahu představují časový tvar zpoždění, a jejich součet je roven a. Zvláštním typem rozloženého zpoždění je geometricky rozložené zpoždění

$$Y_t = \alpha + a(1-r)\left(X_{t-1} + rX_{t-2} + r^2 X_{t-3} + \dots\right), \tag{1.8}$$

kde váhové koeficienty klesají podle nekonečné geometrické posloupnosti s kvocientem r $(0 < r < 1)$.

Spojitý přístup

Proměnné $X(t)$ a $Y(t)$ jsou spojité funkce času. Neexistuje-li zpoždění, má lineární vztah tvar

$$Y = \alpha + aX .$$

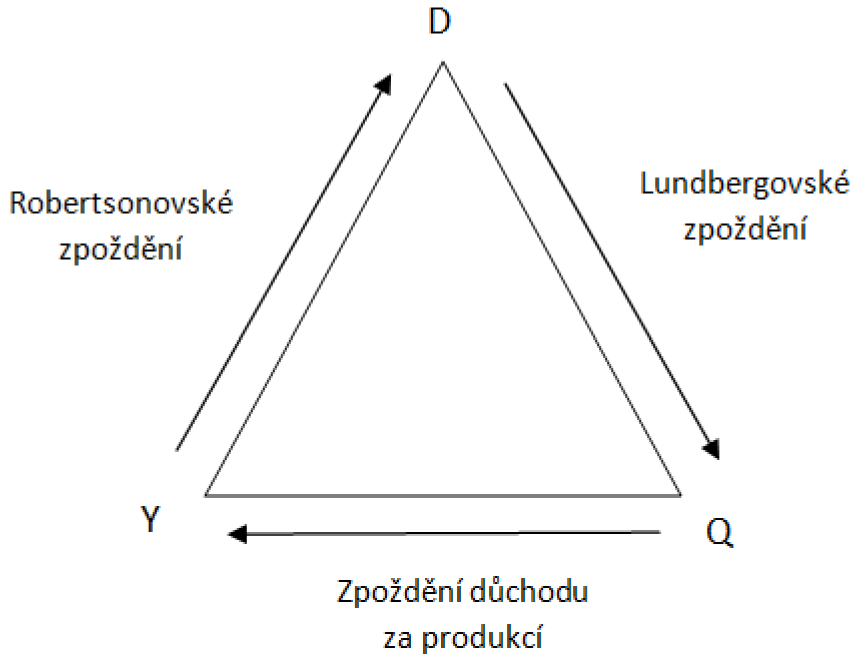
Spojitě rozložené zpoždění je obdobou zpoždění nespojitého, nekonečná posloupnost váhových koeficientů se nahradí spojitou množinou hodnot nějaké funkce $f(\tau)$ a součet se nahradí integrálem. Rozdíl mezi nespojitě a spojitě rozloženým zpožděním je v tom, že Y nezávisí na X v diskrétní množině předcházejících časových okamžiků, ale na hodnotách X v celém minulém spojitém čase. Hodnota funkce $f(\tau)$ udává stupeň závislosti proměnné Y v čase t na hodnotě proměnné X. Obdobou nespojitého geometricky rozloženého zpoždění je spojité exponenciálně rozložené zpoždění, pro které platí:

$$f(\tau) = ke^{-k\tau} . \tag{1.9}$$

Časový průběh zpoždění zde netvoří klesající geometrická posloupnost, ale množina hodnot klesající exponenciální funkce.

Pro ilustraci uvedeme příklady zpoždění v ekonomii. Ve statickém tržním modelu předpokládáme, že se nabídka a poptávka přizpůsobuje změně ceny okamžitě a žádné zpoždění nevzniká. V reálném životě však spotřebitelé k tomu, aby mohli přizpůsobit poptávané množství nové ceně, a také výrobci, aby mohli změnit nabízené množství, potřebují určitý čas. Zpoždění může vznikat jak na straně nabídky, tak na straně poptávky. Zpoždění na straně nabídky je způsobeno nedostatečným nabízeným množstvím na trhu. Výrobcům nějakou dobu potrvá, než zvýší objem výroby. Zpoždění na straně poptávky je způsobeno prudkým zvýšením cen, spotřebitelům nějakou dobu potrvá, než se s tak vysokou cenou smíří a začnou dané zboží znovu nakupovat, nebo zboží nebudou nakupovat vůbec.

Známým mechanismem v makroekonomice je koloběh důchodu, ve kterém uvažujeme závislost důchodu, poptávky a produkce. Důchod Y dává vznik poptávce D, poptávka je impulzem pro produkci Q, z výnosu produkce Q plyne podnikatelům důchod Y. Národohospodářský koloběh si představme takto: Domácnosti se poptávají po určitém zboží, za které zaplatí důchodem Y. Aby byla tato poptávka uspokojena, musí výrobci produkovat určité množství zboží Q. K tomu, aby toto zboží mohli produkovat, potřebují pracovní sílu, kterou musí zaplatit, a tím vzniká důchod Y. Grafické vyjádření zpoždění v koloběhu důchodu je znázorněno v Obrázku 1.3.



Obr. 1.3: Zpoždění v koloběhu důchodu

Robertsonovské zpoždění mezi důchodem a poptávkou dostalo svůj název podle anglického ekonoma Dennise H. Robertsona (1890 – 1963). Lundbergovské zpoždění mezi poptávkou a produkcí zboží a služeb dostalo svůj název podle švédského ekonoma Erika Lundberga (1907 – 1987). Třetí typ zpoždění (Zpoždění důchodu za produkcí*)* bývá považován za nedůležitý a v ekonomických modelech tudíž bereme reálný produkt a reálný důchod za totožné veličiny. Bereme-li v úvahu zpoždění o jedno období, potom Robertsonovské zpoždění můžeme vyjádřit jako závislost D_{t+1} na Y_t, tzn., že v čase $t+1$ spotřebováváme důchod předchozího období t. Lundbergovské zpoždění vyjadřuje přizpůsobování se produkce v čase $t+1$ poptávce z předchozího období t, což zapíšeme jako závislost Q_{t+1} na D_t.

2 Lineární diferenční rovnice

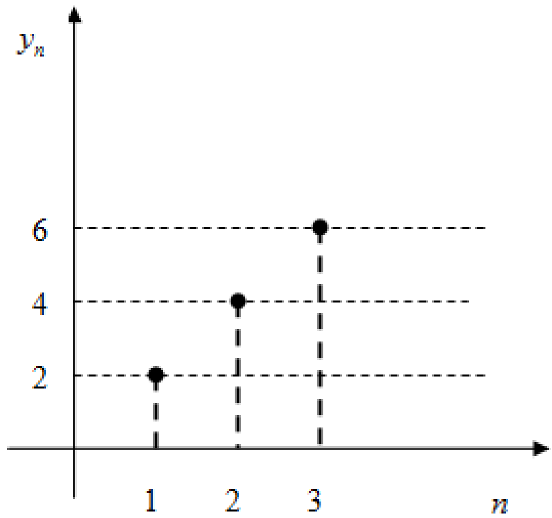
V této kapitole stručně uvedeme některé definice a vlastnosti základních pojmů, se kterými dále pracujeme. Podrobný popis řešení diferenčních rovnic najdeme v Prágerová (1971) nebo Mařík (2005). V prvé řadě zavedeme pojem posloupnost a diference posloupnosti.

2.1 Vymezení základních pojmů a vlastností

Zakladatelem diferenčního počtu je anglický matematik Brook Taylor (1685 – 1731). Diferenční počet má důležité uplatnění jak v samé matematice (v numerickém počtu, v teorii pravděpodobnosti a také v teorii čísel), tak v aplikacích (stavebnictví, elektrotechnice, ekonomii aj.)

Definice 2.1 (Posloupnost)

Posloupností rozumíme reálnou funkci definovanou na množině přirozených čísel $N = \{1,2,\ldots\}$. Zapisujeme např. ve tvaru $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{y_1, y_2, \ldots\}$. V případě, že je posloupnost nekonečná, můžeme zapisovat jen takto $\{y_n\} = \{y_1, y_2, \ldots\}$. Grafem posloupnosti je množina izolovaných (diskrétních) bodů. Znázornění posloupnosti vidíme v Grafu 2.1.



Graf 2.1: Znázornění členů posloupnosti $\{y_n\} = \{2,4,6,\ldots\}$

Definice 2.2 (Rekurentní vzorec)

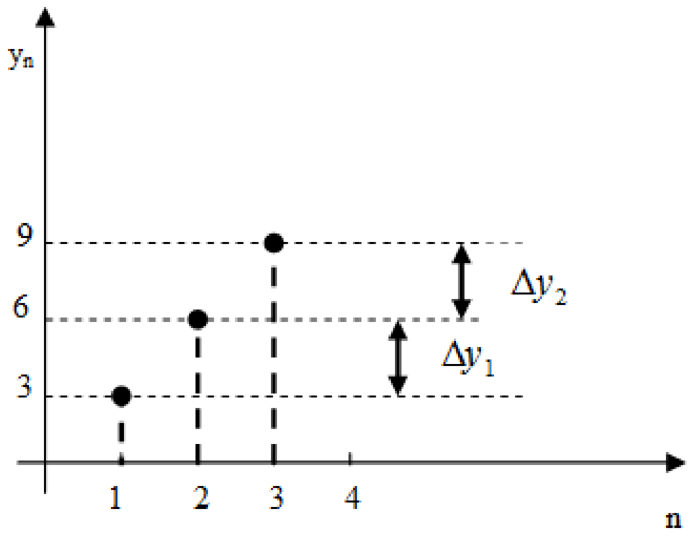
Termínem rekurentní vzorec rozumíme vztah, udávající člen zkoumané posloupnosti na základě jednoho nebo více předcházejících členů. Součástí každého rekurentního vzorce musí být zadání prvního, příp. několika prvních členů posloupnosti.

Definice 2.3 (První diference posloupnosti)

Uvažujme posloupnost $\{y_n\} = \{y_1, y_2, ...\}$ definovanou na množině *N*. Číslo

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

se nazývá první diference posloupnosti $\{y_n\}$ v bodě n, kde $n \in N$, nebo také diference prvního řádu. První diference posloupnosti vidíme v Grafu 2.2.



Graf 2.2: Znázornění členů posloupnosti $\{y_n\}$ a jejich diference v bodech Δy_1, Δy_2

Diference posloupnosti v bodě $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ je rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími členy dané posloupnosti y_{n+1} a y_n. Výsledkem je číslo. Pokud vypočteme všechny diference posloupnosti v bodě $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, $\Delta y_2 = y_3 - y_2$, $\Delta y_3 = y_4 - y_3$ atd., získáme novou posloupnost čísel, tzv. první diferenci posloupnosti. První diference posloupnosti $\{\Delta y_n\}$ je tudíž posloupnost rozdílů mezi dvěma po sobě jdoucími členy posloupnosti $\{y_n\}$.

Věta 2.1 (Diference aritmetických operací)

Jestliže $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou dvě posloupnosti a C je konstanta, pak platí:

(I) $\Delta(a_n \pm b_n) = \Delta a_n \pm \Delta b_n$,

(II) $\Delta(C \cdot a_n) = C \cdot \Delta a_n$,

(III) $\Delta(a_n \cdot b_n) = a_n \cdot \Delta b_n + b_n \cdot \Delta a_n + \Delta a_n \cdot \Delta b_n$,

(IV) $\Delta\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{b_n \cdot \Delta a_n - a_n \cdot \Delta b_n}{b_n \cdot b_{n+1}}$.

Důkaz této věty najdeme v Prágerová (1971).

Definice 2.4 (Diference vyšších řádů)

Diference posloupnosti v bodě Δy_n členů posloupnosti $\{y_n\}$ tvoří posloupnost $\{\Delta y_n\}$. Z členů této posloupnosti lze opět vypočítat diference, tzv. druhé diference posloupnosti $\{y_n\}$ v bodě. Značíme je $\Delta^2 y_n$ a platí $\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n)$.

Zcela analogicky definujeme třetí diference posloupnosti v bodě $\Delta^3 y_n = \Delta(\Delta^2 y_n)$.

Definice 2.5 (Diference k-tého řádu)

Diferenci posloupnosti k-tého řádu $\{y_n\}$ v bodě n, $n \in N$, značíme $\Delta^k y_n$ a definujeme takto:

1. Pro $k = 1$ definujeme $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$.
2. Jsou-li definovány diference posloupnosti v bodě $(k-1)$, pak k-tá diference je definována vztahem $\Delta^k y_n = \Delta(\Delta^{k-1} y_n)$.

Definice 2.6 (Diferenční rovnice)

Diferenční rovnice je vztah mezi posloupností y_n a jejími diferencemi. Implicitně zapisujeme

$$F(n, y_n, \Delta y_n, \ldots, \Delta^k y_n) = 0 \tag{2.1}$$

a nazýváme diferenční rovnicí I. typu. Pokud diference vyjádříme rekurentně, získáme diferenční rovnici II. typu, která má tvar

$$\Phi(n, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}) = 0 . \tag{2.2}$$

Řešením diferenční rovnice je každá posloupnost y_n, která zadané rovnici vyhovuje.

Mezi nejdůležitější rovnice z hlediska aplikací v ekonomii patří lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty 1. a 2. řádu a speciální pravou stranou.

Definice 2.7 (Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty)

Jestliže jsou $a_1, a_2, ..., a_k$ reálná čísla a $a_k \neq 0$, pak lineární diferenční rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty je vyjádřená jako

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + ... + a_k y_n = f(n). \tag{2.3}$$

Je-li $f(n) = 0$, nazývá se rovnice homogenní, je-li $f(n) \neq 0$, je rovnice nehomogenní.

Poznámka 2.1: Rovnice (2.3) je diferenční rovnice II. typu. V teorii posloupností je nazývána rekurentním vzorcem, protože je to vztah pro několik po sobě jdoucích členů zatím neznámé posloupnosti.

Při řešení diferenčních rovnic nejdříve pracujeme se zkrácenou diferenční rovnicí, tj. rovnicí (2.3), kde je na pravé straně nula:

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + ... + a_k y_n = 0. \tag{2.4}$$

Tuto rovnici vyřešíme pomocí charakteristické rovnice s proměnnou z ve tvaru

$$z^k + a_1 z^{k-1} + a_2 z^{k-2} + ... + a_k = 0. \tag{2.5}$$

Charakteristická rovnice je algebraická rovnice stupně k, její kořeny $z_1, z_2, ..., z_k$ použijeme pro obecné řešení zkrácené rovnice $\hat{y}_n$. Postup popisujeme v kapitole 2.2 pro diferenční rovnice 2. řádu.

Posledním krokem řešení je odhad tzv. partikulárního řešení, které zjišťujeme podle tvaru pravé strany. V rovnicích používáme tzv. speciální pravou stranu ve tvaru $f(n) = \rho^n P_s(n)$. Odhadnuté partikulární řešení je $\bar{y}_n = n^r \rho^n Q_s(n)$, kde r je násobnost čísla ρ jako kořene charakteristické rovnice.

Obecné řešení diferenční rovnice (2.3) je součtem obecného řešení zkrácené rovnice a odhadnutého partikulárního řešení

$$y_n = \hat{y}_n + \bar{y}_n. \tag{2.6}$$

Obecné řešení lineární diferenční rovnice (2.3) je v teorii posloupností funkční předpis neznámé posloupnosti, která byla zadána rekurentně. Toto obecné řešení, resp. funkční předpis posloupnosti, umožní vypočítat libovolný člen posloupnosti, aniž bychom museli znát všechny předchozí členy. Podrobnosti najdeme v Prágerová (1971).

2.2 Homogenní diferenční rovnice s konstantními koeficienty 1. a 2. řádu

Homogenní lineární diferenční rovnice prvního řádu, nazývaná také zkrácená, je rovnice ve tvaru

$$y_{n+1} + py_n = 0, \; p \in R, p \neq 0. \tag{2.7}$$

Její charakteristickou rovnicí je lineární rovnice

$$z + p = 0. \tag{2.8}$$

Řešením je geometrická posloupnost s kvocientem $(-p)$, tzn., že obecné řešení je

$$y_n = C(-p)^n, \; C \in R. \tag{2.9}$$

Homogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu je rovnice tvaru

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0, \; p, q \in R, q \neq 0. \tag{2.10}$$

Charakteristickou rovnicí je v tomto případě kvadratická rovnice

$$z^2 + pz + q = 0. \tag{2.11}$$

Kořeny charakteristické rovnice z_1, z_2 tvoří tzv. fundamentální systém řešení. Obecné řešení lineární diferenční rovnice (2.10) získáme jako lineární kombinaci prvků fundamentálního systému řešení z_1, z_2.

Věta 2.3 (Obecné řešení homogenní lineární diferenční rovnice druhého řádu)
Uvažujme rovnici (2.10) a její charakteristickou rovnici.

- Má-li charakteristická rovnice dva reálné různé kořeny $z_1 \in R$, $z_2 \in R$, $z_1 \neq z_2$, fundamentální systém řešení má dva prvky z_1^n, z_2^n. Obecné řešení má tvar
$$\hat{y}_n = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n.$$
- Má-li charakteristická rovnice jeden reálný dvojnásobný kořen $z_1 = z_2 \in R$, fundamentální systém řešení má jeden prvek z_1^n. Obecné řešení je v tomto případě
$$\hat{y}_n = C_1 z_1^n + C_2 z_1^n n.$$
- Má-li charakteristická rovnice dva komplexně sdružené kořeny $z_1, z_2 \notin R$ a je-li $z_1 = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ goniometrický tvar jednoho z těchto kořenů, obecné řešení je
$$\hat{y}_n = C_1 r^n \sin(n\varphi) + C_2 r^n \cos(n\varphi)$$

Důkaz této věty najdeme v Prágerová (1971).

2.3 Nehomogenní diferenční rovnice s konstantními koeficienty 1. a 2. řádu

Nehomogenní diferenční rovnice s konstantními koeficienty mají tvar

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + \ldots + a_k y_n = \rho^n P_s(n),$$

kde výraz na pravé straně nazýváme tzv. speciální pravou stranou.

Věta 2.4 (Metoda odhadu partikulárního řešení)

Uvažujme, že $\rho \in R$ je reálné číslo a $P_s(n)$ polynom stupně s proměnné n. Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty prvního řádu tvaru

$$y_{n+1} + py_n = \rho^n P_s(n)$$

nebo druhého řádu tvaru

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = \rho^n P_s(n),$$

má odhadnuté partikulární řešení

$$\bar{y}_n = n^r \rho^n Q_s(n), \tag{2.12}$$

kde $Q_s(n)$ je vhodný polynom stupně s proměnné n a hodnota čísla r je stanovena následujícím způsobem:

- $r = 0,$ pokud číslo ρ není kořenem charakteristické rovnice,
- $r = 1,$ pokud číslo ρ je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice,
- $r = 2,$ pokud číslo ρ je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice (nenastane u rovnice prvního řádu).

Koeficienty polynomu $Q_s(n)$ lze nalézt metodou neurčitých koeficientů po dosazení partikulárního řešení $\bar{y}_n = n^r \rho^n Q_s(n)$ do původní rovnice.

ALGORITMUS 2.1 (Řešení lineární diferenční rovnice prvního a druhého řádu s konstantními koeficienty)

1. Najdeme zkrácenou lineární diferenční rovnici a její charakteristickou rovnici.
2. Vyřešíme charakteristickou rovnici, z kořenů této rovnice získáme obecné řešení $\hat{y}_n$ zkrácené lineární diferenční rovnice.
3. Určíme čísla s, ρ a r v předpokládaném tvaru partikulárního řešení $\bar{y}_n = n^r \rho^n Q_s(n).$

4. Vypočteme $\bar{y}_{n+1}$, resp. $\bar{y}_{n+2}$, jedná-li se o rovnici druhého řádu, a dosadíme do zadané rovnice. Tuto rovnici algebraicky upravíme.
5. Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin n a nalezneme koeficienty polynomu $Q_s(n)$. Tyto koeficienty použijeme ve vzorci (2.12) a získáme partikulární řešení $\bar{y}_n$ nezkrácené rovnice.
6. Obecné řešení nezkrácené rovnice obdržíme z vypočtených dílčích řešení $\hat{y}_n$ a $\bar{y}_n$ pomocí vzorce (2.6).

3 Diferenční rovnice v dynamických modelech v mikroekonomii

V literatuře lze nalézt řadu dynamických modelů v mikroekonomii. Nejznámějším z nich je jednoduchý pavučinový model, známý rovněž pod názvem Cobweb model. V tomto modelu se využívají poznatky o diferenčních rovnicích k pochopení pohybu ceny na trhu. Jednoduchý pavučinový model není úplně reálný, protože předpokládá, že nabízející udrží cenu z předcházejícího období. Existují modely bližší realitě, ve kterých může nabízející cenu změnit. Jedním z takových modelů je model uvažující tzv. normální cenu, o které výrobci předpokládají, že za určitou dobu budou výrobek za tuto cenu prodávat. Další možností je, že nabízející provede změnu ceny, která je přímo úměrná rozdílu cen za dvě předchozí období. V mé práci se podrobně zabýváme modelem, který předpokládá, že nabízející udržuje zásoby. Diferenční rovnice nenacházejí v mikroekonomii uplatnění jen v tržních modelech, Glückaufová (1966) popisuje mikroekonomický model i z oblasti teorie skladů.

3.1 Model trhu se zahrnutím zásob

V jednoduchém pavučinovém modelu předpokládáme, že na trhu je

- zboží podléhající rychlé zkáze, které nemůže být skladováno,
- zboží, které je skladovatelné, ale žádné zásoby neudržujeme.

Model trhu se zahrnutím zásob bere v úvahu skutečnost, že prodávající v minulém období neprodal všechno zboží, a tím se mu nahromadily zásoby, které udržuje.

Před matematickým vyjádřením modelu musíme vzít v úvahu následující předpoklady:

1. Mezi poptávaným množstvím Q_{Dt} a aktuálně vyrobeným (nabízeným) množstvím Q_{St} existuje zpoždění. Dále předpokládáme, že Q_{Dt} i Q_{St} jsou lineární funkcí ceny P_t.
2. Přizpůsobování ceny není ovlivňováno vyčištěním trhu, ale je stanoveno prodávajícími: na začátku každého období prodávající určí cenu podle stavu zásob. Jestliže se v předchozím období zásoby akumulovaly, cena pro aktuální období je stanovena na nižší úrovni než v období předchozím a naopak.
3. Přizpůsobování ceny během jednotlivých období je proporcionální k pozorovaným změnám ve stavu zásob.

Zohlednění těchto předpokladů matematicky vyjádříme rovnicemi

$$Q_{Dt} = \alpha - \beta P_t\,,\ (\alpha, \beta > 0) \tag{3.1}$$

$$Q_{St} = -\gamma + \delta P_t\,,\ (\gamma, \delta > 0) \tag{3.2}$$

$$P_{t+1} = P_t - \sigma(Q_{St} - Q_{Dt}),\ (\sigma > 0) \tag{3.3}$$

kde σ znamená koeficient vyrovnávání zásob, Q_{Dt} je poptávané množství v běžném období t, Q_{St} je nabízené množství v běžném období t a P_t cena zboží v běžném období t.

Nyní určíme rovnovážnou cenu, která představuje optimální stav na trhu. Při jejím určování nebereme v úvahu zpoždění, dáme pouze do rovnosti lineární rovnice nabídky a poptávky:

$$Q_{dt} = Q_{st}\,,$$

$$\alpha - \beta \cdot P_t = -\gamma + \delta \cdot P_t\,,$$

$$P_t(\beta + \delta) = \alpha + \gamma\,,$$

$$P_t^* = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\,. \tag{3.4}$$

Rovnice (3.1) a (3.2) dosadíme do rovnice (3.3):

$$P_{t+1} = P_t - \sigma(-\gamma + \delta P_t - (\alpha - \beta P_t)),$$

$$P_{t+1} = P_t + \sigma\gamma - \sigma \cdot \delta \cdot P_t + \sigma\alpha - \sigma \cdot \beta \cdot P_t\,,$$

$$P_{t+1} = P_t(1 - \sigma\delta - \sigma\beta) + \sigma\gamma + \sigma\alpha\,,$$

čímž dostaneme diferenční rovnici 1. řádu

$$P_{t+1} - P_t[1 - \sigma(\delta + \beta)] = \sigma(\alpha + \gamma).$$

Tuto rovnici nyní vyřešíme:

$$P_{t+1} - P_t[1 - \sigma(\delta + \beta)] = 0\,,$$

$$z - [1 - \sigma(\delta + \beta)] = 0\,,$$

$$\hat{P}_t = k \cdot [1 - \sigma(\delta + \beta)]^t\,.$$

Koeficient k v obecném řešení zkrácené rovnice znamená počáteční odchylku skutečné ceny od ceny rovnovážné $(P_0 - P_t^*)$. Dopočítáme partikulární řešení nezkrácené rovnice:

$$\overline{P}_t = A\,,\ \overline{P}_{t+1} = A\,,$$

$$A - A[1 - \sigma(\beta + \delta)] = \sigma(\alpha + \gamma),$$

$$A[1 - 1 + \sigma(\beta + \delta)] = \sigma(\alpha + \gamma),$$

$$A = \frac{\sigma(\alpha+\gamma)}{\sigma(\beta+\delta)} = \frac{(\alpha+\gamma)}{(\beta+\delta)},$$

$$\overline{P}_t = \frac{(\alpha+\gamma)}{(\beta+\delta)}.$$

Řešení diferenční rovnice dostaneme jako součet obecného a partikulárního řešení:

$$P_t = \hat{P}_t + \overline{P}_t,$$

$$P_t = (P_0 - P_t^*) \cdot [1-\sigma(\beta+\delta)]^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}. \tag{3.5}$$

Z řešení diferenční rovnice je zřejmé, že dynamická stabilita závisí na výrazu

$$b^t = [1-\sigma(\beta+\delta)]^t, \tag{3.6}$$

který nyní diskutujeme.

V následující tabulce vidíme, že výraz b může nabývat pěti hodnot. Na základě znalosti hodnot výrazu b určíme, jaký bude typ časového průběhu P_t.

Oblast	Hodnota b	Hodnota σ	Časový průběh P_t
I	$0 < b < 1$	$0 < \sigma < \frac{1}{\beta+\delta}$	Bez oscilací a konvergentní
II	$b > 1$	$\sigma < 0$	Bez oscilací a divergentní
III	$-1 < b < 0$	$\frac{1}{\beta+\delta} < \sigma < \frac{2}{\beta+\delta}$	Tlumené oscilace
IV	$b <$ -1	$\sigma > \frac{2}{\beta+\delta}$	Explozivní oscilace
V	$b = -1$	$\sigma = \frac{2}{\beta+\delta}$	Konstantní oscilace

Tabulka 3.1: Časový průběh ceny P_t

Jednotlivé možnosti časového průběhu ceny P_t popíšeme pro modelový příklad s těmito parametry:

α	β	γ	δ	P_0
21	2	3	6	6

Tabulka 3.2: Parametry modelového příkladu

Pro každý typ časového průběhu uvedeme příslušnou diferenční rovnici, řešení této rovnice, interval, z kterého by měl být koeficient vyrovnávání zásob σ, kalkulační tabulky a graf. Rovnice nabídky a poptávky položíme sobě rovny a vypočítáme rovnovážnou hodnotu:

$$Q_{Dt} = 21 - 2P_t, \qquad Q_{St} = -3 + 6P_t,$$

$$Q_{Dt} = Q_{St},$$

$$-3 + 6P_t = 21 - 2P_t,$$

$$8P_t = 24,$$

$$P_t^* = 3.$$

V I. oblasti, kde je časový průběh ceny P_t konvergentní a bez oscilací, by měla hodnota koeficientu vyrovnávání zásob σ ležet v intervalu

$$0 < \sigma < \frac{1}{\beta + \delta}.$$

Dosadíme-li hodnoty parametrů $\beta = 2$ a $\delta = 6$, dostaneme interval

$$0 < \sigma < \frac{1}{8}.$$

V našem modelovém případě zvolíme hodnotu koeficientu σ_1 rovnu $0{,}04$. Příslušná diferenční rovnice je

$$P_{t+1} - 0{,}68P_t = 0{,}96,$$

a její řešení má tvar

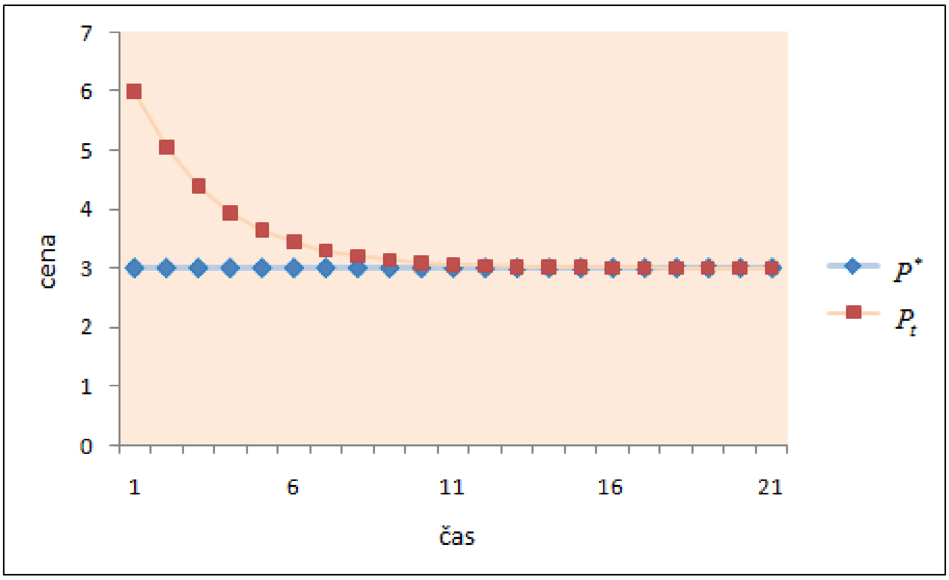
$$P_t = 3 \cdot 0{,}68^t + 3.$$

V programu MS Excel vytvoříme kalkulační tabulku časového průběhu ceny P_t.

t	P_t	t	P_t
0	6	11	3,043124
1	5,04	12	3,029324
2	4,3872	13	3,019941
3	3,943296	14	3,01356
4	3,641441	15	3,009221
5	3,43618	16	3,00627
6	3,296602	17	3,004264
7	3,20169	18	3,002899
8	3,137149	19	3,001971
9	3,093261	20	3,001341
10	3,063418	21	3,000912

Tabulka 3.3: Kalkulace časového průběhu

S rostoucím časem se výraz $0{,}68^t$ blíží nule a cena P_t se blíží své rovnovážné hodnotě. Grafický vývoj časového průběhu ceny P_t vidíme v Obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Konvergentní vývoj ceny bez oscilací

Ve II. oblasti je časový průběh ceny bez oscilací a divergentní. Koeficient vyrovnávání zásob je z intervalu

$$\sigma < 0.$$

Pro tento typ časového průběhu zvolíme hodnotu $\sigma_{\text{II}} = -0{,}01$. Získáme diferenční rovnici

$$P_{t+1} - 1{,}08 P_t = -0{,}24.$$

Řešení této rovnice je

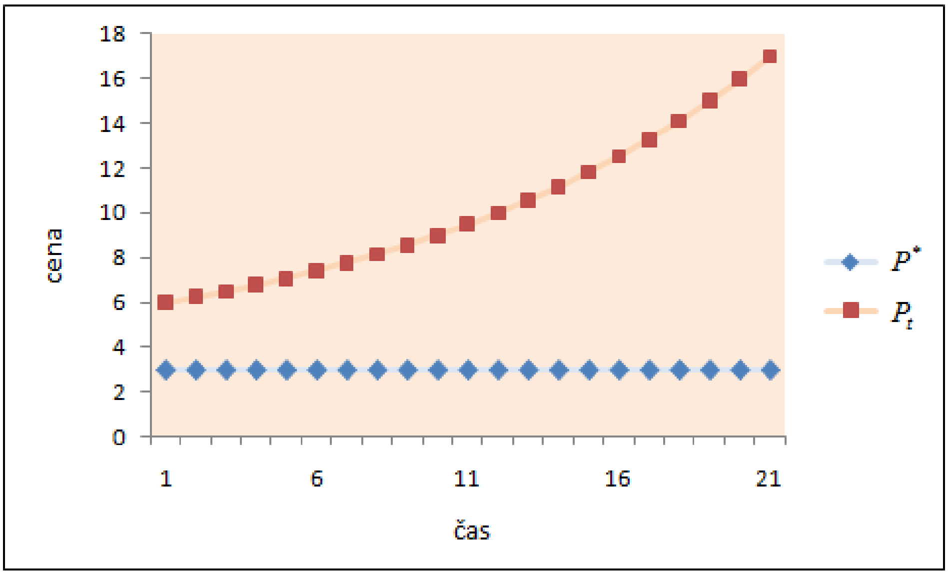
$$P_t = 3 \cdot 1{,}08^t + 3.$$

S rostoucím časem se výraz $1{,}08^t$ blíží nekonečnu, cena P_t se odchyluje od své rovnovážné hodnoty. Kalkulace časového průběhu ceny je zobrazena v Tabulce 3.4.

t	P_t	t	P_t
0	6	11	9,994917
1	6,24	12	10,55451
2	6,4992	13	11,15887
3	6,779136	14	11,81158
4	7,081467	15	12,51651
5	7,407984	16	13,27783
6	7,760623	17	14,10005
7	8,141473	18	14,98806
8	8,552791	19	15,9471
9	8,997014	20	16,98287
10	9,476775	21	18,1015

Tabulka 3.4: Kalkulace časového průběhu

Grafický vývoj časového průběhu ceny P_t je zobrazen v Obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Divergentní vývoj ceny bez oscilací

Ve III. oblasti cena P_t v čase tlumeně osciluje ke své rovnovážné hodnotě. Koeficient vyrovnávání zásob je v tomto případě z intervalu

$$\frac{1}{\beta+\delta} < \sigma < \frac{2}{\beta+\delta}.$$

Je třeba zdůraznit, že koeficient vyrovnávání zásob σ je ovlivněný sklony nabídky a poptávky β, δ. Pro hodnoty parametrů $\beta = 2$ a $\delta = 6$, které jsou pro všechny typy časových průběhů stejné, dostaneme interval

$$\frac{1}{8} < \sigma < \frac{2}{8}.$$

Zvolíme hodnotu koeficientu vyrovnávání zásob $\sigma_{\mathrm{III}} = 0{,}2$. Dostaneme diferenční rovnici

$$P_{t+1} + 0{,}6P_t = 4{,}8,$$

jejíž řešení je

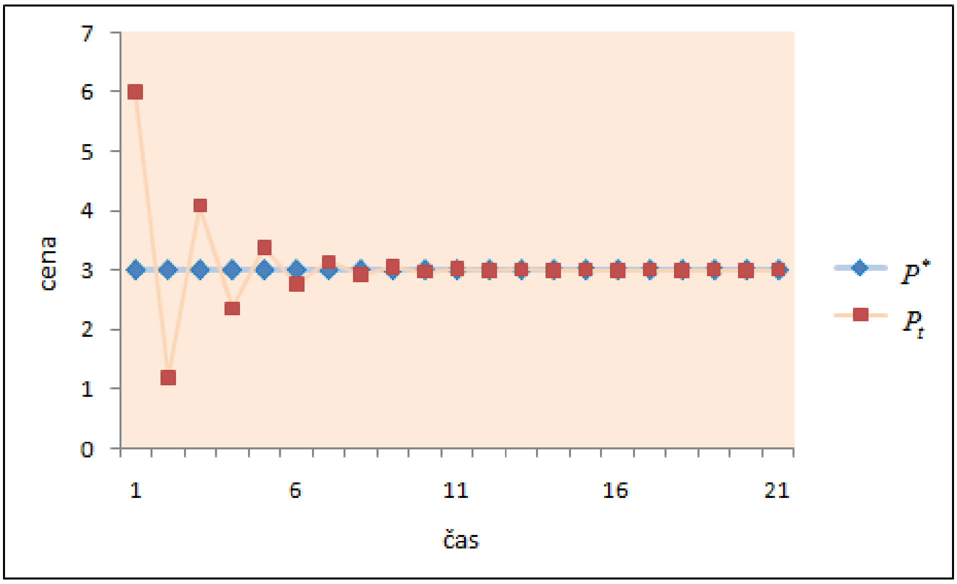
$$P_t = 3 \cdot \left(-0{,}6^t\right) + 3.$$

Výraz $(-0{,}6)^t$ je v absolutní hodnotě menší než jedna, cena P_t se v probíhajícím čase přibližuje k rovnovážné hodnotě $P_t^* = 3$. Protože je $-0{,}6$ záporné číslo, cena P_t osciluje kolem rovnovážné hodnoty. V sudých časových obdobích je cena nad svou rovnovážnou hodnotou, v lichých naopak pod svou rovnovážnou hodnotou. Kalkulace časového průběhu ceny P_t je zobrazena v Tabulce 3.5.

t	P_t	t	P_t
0	6	11	2,989116
1	1,2	12	3,00653
2	4,08	13	2,996082
3	2,352	14	3,002351
4	3,3888	15	2,998589
5	2,76672	16	3,000846
6	3,139968	17	2,999492
7	2,916019	18	3,000305
8	3,050388	19	2,999817
9	2,969767	20	3,00011
10	3,01814	21	2,999934

Tabulka 3.5: Kalkulace časového průběhu

Časový průběh ceny P_t můžeme vidět v Obrázku 3.3.



Obrázek 3.3: Tlumené oscilace

Ve IV. oblasti cena P_t v čase stejně jako v předchozím případě osciluje kolem rovnovážné hodnoty, rozdíl je však v tom, že tyto oscilace jsou explozivní. Koeficient vyrovnávání zásob je z intervalu

$$\sigma > \frac{2}{\beta + \delta}\text{, resp. } \sigma > \frac{2}{8}.$$

Zvolíme $\sigma_{IV} = 0{,}29$. Diferenční rovnici dostaneme ve tvaru

$$P_{t+1} + 1{,}32 P_t = 6{,}96,$$

přičemž řešení této rovnice je

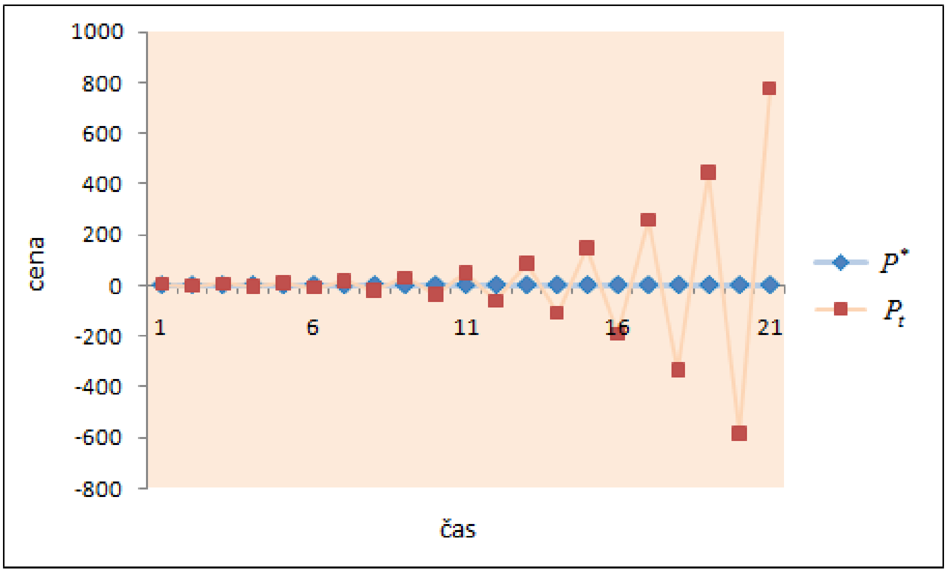
$$P_t = 3 \cdot (-1{,}32)^t + 3.$$

Výraz $(-1{,}32)^t$ je v absolutní hodnotě větší než jedna, cena P_t se v probíhajícím čase odchyluje od rovnovážné hodnoty. Protože je $-1{,}32$ záporné číslo, cena P_t kolem rovnovážné hodnoty osciluje. V sudých časových obdobích je cena nad svou rovnovážnou hodnotou, v lichých naopak pod svou rovnovážnou hodnotou. Kalkulace časového průběhu ceny P_t je zobrazena v Tabulce 3.6.

t	P_t	t	P_t
0	6	11	-60,5967
1	-0,96	12	86,94763
2	8,2272	13	-107,811
3	-3,8999	14	149,2703
4	12,10787	15	-190,077
5	-9,02239	16	257,8615
6	18,86956	17	-333,417
7	-17,9478	18	447,0706
8	30,65112	19	-583,173
9	-33,4995	20	776,7486
10	51,17931	21	-1018,35

Tabulka 3.6: Kalkulace časového průběhu

Vývoj ceny P_t v čase vidíme v Obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Explozivní oscilace

Charakteristické pro V. oblast je, že cena P_t konstantně osciluje kolem rovnovážné hodnoty. Odchylka od rovnovážné hodnoty je dána rozdílem mezi počáteční a rovnovážnou hodnotou $P_0 - P^*$. Koeficient vyrovnávání zásob musí mít hodnotu

$$\sigma = \frac{2}{\beta + \delta}, \text{ resp. } \sigma = \frac{2}{8}.$$

Při hodnotě koeficientu vyrovnávání zásob $\sigma_V = \frac{2}{8}$ dostaneme diferenční rovnici

$$P_{t+1} + P_t = 6,$$

která má řešení

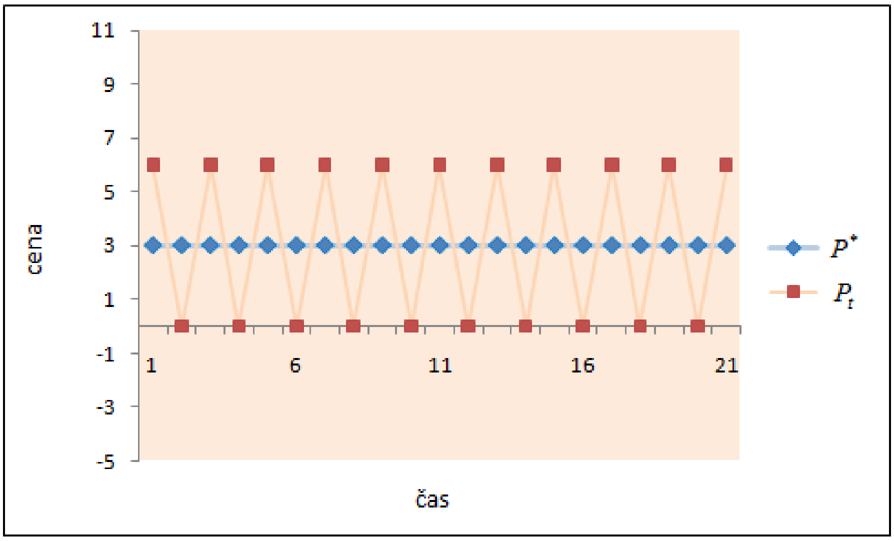
$$P_t = 3 \cdot (-1)^t + 3.$$

V kalkulační tabulce cena P_t nabývá pouze dvou hodnot, což je zřejmé i z Tabulky 3.7.

t	P_t	t	P_t
0	6	11	0
1	0	12	6
2	6	13	0
3	0	14	6
4	6	15	0
5	0	16	6
6	6	17	0
7	0	18	6
8	6	19	0
9	0	20	6
10	6	21	0

Tabulka 3.7: Kalkulace časového průběhu

Cena, která se v čase t vyvíjí konstantními oscilacemi, je zobrazena v Obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Konstantní oscilace

V modelu předpokládáme, že prodávající stanoví ceny podle změn zásob. V literatuře Allen (1971) můžeme nalézt model, kde prodávající ceny stanoví podle úrovně zásob. Jestliže úroveň zásob z předcházejícího období klesne pod danou výši Q, prodávající zvyšují cenu úměrně poklesu zásob pod Q. Obdobně se cena při překročení zásob nad danou hodnotu Q úměrně tomuto překročení snižuje.

4 Diferenční rovnice v dynamických modelech v makroekonomii

Rozsáhlý popis makroekonomických modelů nalezneme v Allen (1971). Mezi základní modely patří model s multiplikátorem a akcelerátorem. V této práci se zabýváme modely s multiplikátorem, kde na pravé straně diferenční rovnice je nejdříve konstanta a poté mnohočlen prvního stupně. Reálnost těchto modelů ověříme na datech získaných z databáze časových řad ARAD České národní banky. Data jsou zobrazeny v Příloze č. 1.

Diferenční rovnice mají velké uplatnění také v modelech hospodářských cyklů. Tyto matematické modely využívají náročný matematický aparát a v této bakalářské práci se jimi nezabýváme.

4.1 Dynamický multiplikátor

Model uvažujeme ve dvousektorové ekonomice, tzn., že bereme v úvahu sektor domácností a sektor firem (sektory vláda a zahraničí do modelu nezahrnujeme). Jedná se tudíž o uzavřenou ekonomiku, kde jsou vládní výdaje nulové a nevyváží ani nedováží se žádné zboží či služby. Pro model platí následující předpoklady:

- ekonomika nedosahuje úrovně potencionálního produktu – existuje tak produkční mezera, je k dispozici dostatečná zásoba kapitálu a dostatečná nabídka práce;
- cenová hladina i nominální mzdy jsou fixní.

Celkový důchod ekonomiky vyjádříme jako

$$Y_t = C_t + I_t, \tag{4.1}$$

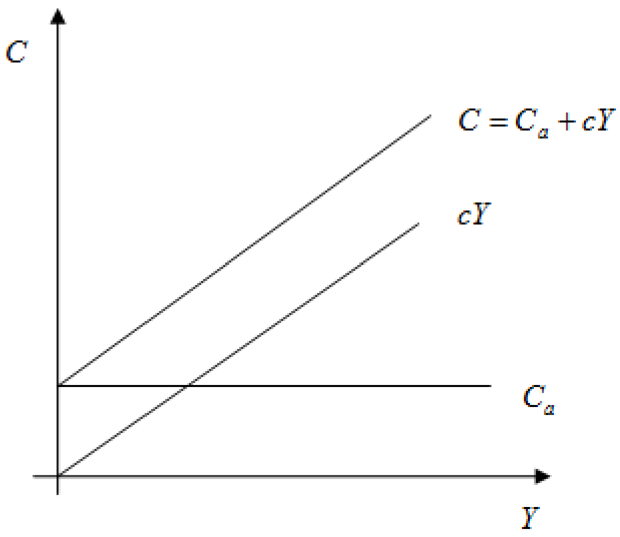
kde Y_t vyjadřuje celkový důchod v čase t, C_t celkovou (agregátní) spotřebu v čase t a I_t celkové investice v čase t.

V modelu dále předpokládáme, že spotřebitelé spotřebovávají důchod předchozího období, tzn., že v období $t+1$ spotřebovávají důchod Y_t.

Celkovou spotřebu v čase t, která je lineárně závislá na důchodu předchozího období, vyjádříme vztahem

$$C_{t+1} = C_a + cY_t, \tag{4.2}$$

kde C_a značí autonomní spotřebu, tj. spotřebu, která je nezávislá na výši důchodu, a c mezní sklon ke spotřebě (někdy označován jako mpc - z anglického marginal propensity to consume), přičemž $C_a > 0$ a $0 < c < 1$. Funkci spotřebních výdajů vyjádříme graficky takto:



Graf 4.1: Funkce spotřebních výdajů

Předpokládáme, že autonomní investice jsou konstantní po celou sledovanou dobu, proto

$$I_t = I_a . \tag{4.3}$$

Dosazením vztahů (4.2) a (4.3) do vztahu (4.1) dostaneme diferenční rovnici 1. řádu

$$Y_{t+1} - cY_t = C_a + I_A . \tag{4.4}$$

Pro zjednodušení nahradíme součet autonomních spotřebních a investičních výdajů $C_a + I_a$ označením A a hovoříme o autonomních výdajích.

Multiplikátor je považován v ekonomii za stabilizující prvek, tzn., že skutečný důchod Y_t se v čase t přibližuje k rovnovážnému důchodu, pro který použijeme označení Y^*. Nyní odvodíme z Keynesova výdajového modelu rovnovážný důchod Y^*:

$$Y = C + I_a , \qquad C = C_a + cY .$$

Druhou rovnici dosadíme do první:

$$Y = C_a + cY + I_a ,$$

$$(1 - c) \cdot Y = C_a + I_a ,$$

$$Y^* = \frac{C_a + I_a}{1 - c} ,$$

$$Y^* = \frac{1}{1 - c} A . \tag{4.5}$$

Řešení rovnice $Y_{t+1} - cY_t = A$ je následující:

$$Y_{t+1} - cY_t = 0,$$

$$z - c = 0,$$

$$\hat{Y}_t = k \cdot c^t.$$

Konstanta k v obecném řešení zkrácené rovnice je počáteční odchylka skutečného důchodu od důchodu rovnovážného. Odhadneme partikulární řešení:

$$\overline{Y}_t = B,\ \overline{Y}_{t+1} = B,$$

$$B - cB = A,$$

$$B = \frac{A}{1-c},$$

$$\overline{Y}_t = \frac{A}{1-c}.$$

V tomto nejjednodušším matematickém modelu je partikulárním řešením nezkrácené rovnice hodnota rovnovážného důchodu.

Řešením diferenční rovnice je nespojitá funkce, resp. funkční předpis posloupnosti

$$Y_t = \hat{Y}_t + \overline{Y}_t, \text{ resp.}$$

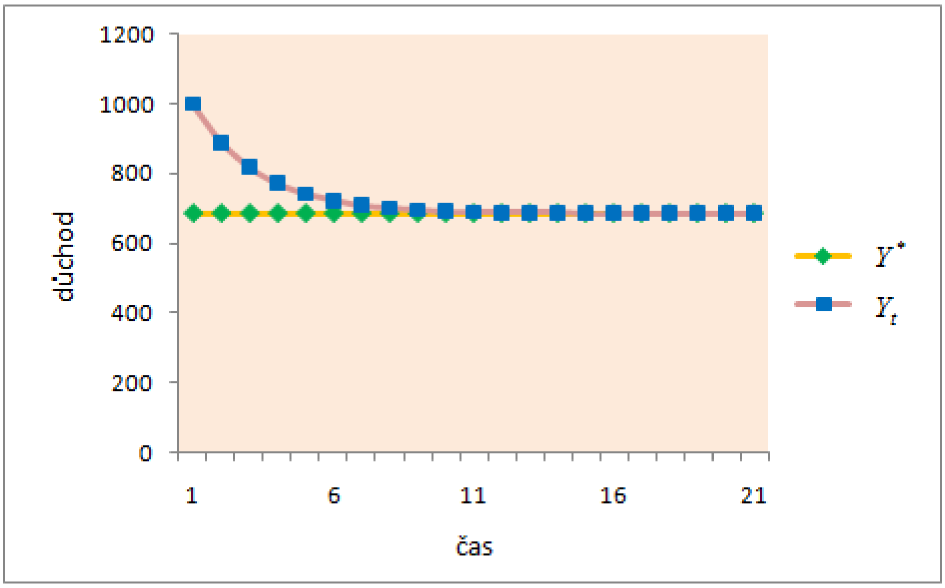
$$Y_t = \left(Y_0 - Y^*\right) \cdot c^t + \frac{A}{1-c}. \tag{4.6}$$

Protože mezní sklon ke spotřebě c je z intervalu $(0,1)$, výraz c^t s rostoucím časem konverguje k nule, proto k nule konvergují k nule i odchylky a skutečný důchod se přibližuje k důchodu rovnovážnému.

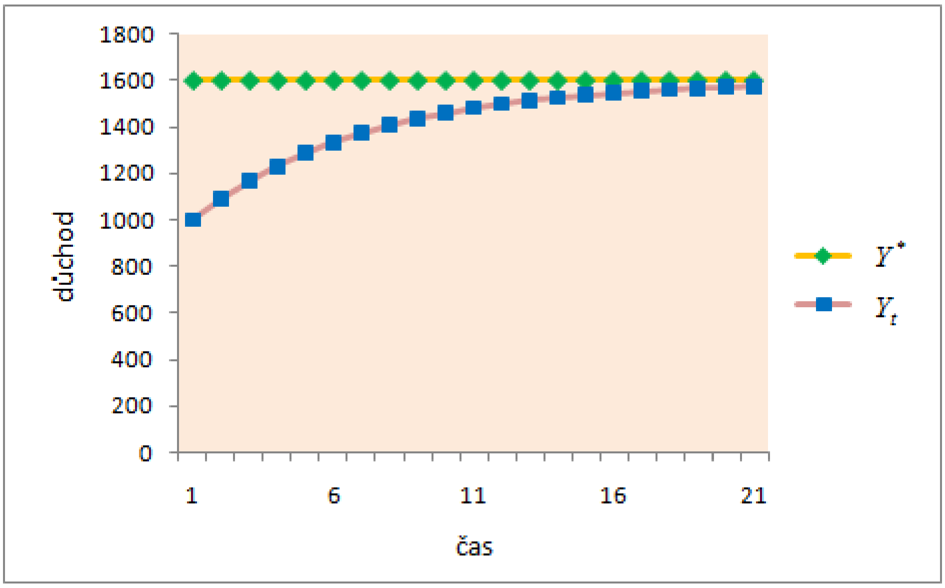
Otázkou je, za jak dlouho dosáhne skutečný důchod hodnoty rovnovážného důchodu. Rychlost reakce (rychlost, s níž směřuje skutečný důchod Y_t k rovnovážnému důchodu Y^*), závisí:

- na délce časového zpoždění,
- na velikosti mezního sklonu k úsporám $s = 1 - c$.

Zkrátí-li se zpoždění (např. z 6 měsíců na 3 měsíce), potom je rychlost reakce vyšší; zvětší-li se mezní sklon k úsporám s, zmenší se mezní sklon ke spotřebě c a menší hodnota c zvýší rychlost reakce. V následujících 2 obrázcích porovnáme rychlost reakce při mezním sklonu ke spotřebě $c = 0{,}65$ a $c = 0{,}85$.



Graf 4.2: Rychlost reakce při $c = 0{,}65$



Graf 4.3: Rychlost reakce při $c = 0{,}85$

Rychlost reakce lze posoudit také podle toho, jak velký je rozdíl mezi skutečnou a rovnovážnou hodnotou v určitém časovém okamžiku. Zvolme časový okamžik $t = 5$. Při $c = 0{,}65$ je tento rozdíl roven 36,466, při $c = 0{,}85$ je roven v absolutní hodnotě 266,22. Je zřejmé, že při stejných parametrech dosáhneme rovnovážné hodnoty rychleji (za méně období), je-li mezní sklon ke spotřebě menší (resp. mezní sklon k úsporám větší).

Poznámka 4.1: Grafy jsme vytvořili v programu MS Excel pro modelový příklad, kdy $A = 240$, $Y_0 = 1000$ a $c = 0{,}65$, resp. $c = 0{,}85$.

Dosazením parametrů do rovnice (4.4) získáme diferenční rovnice:

$$Y_{t+1} - 0{,}65 Y_t = 240,$$

$$Y_{t+1} - 0{,}85 Y_t = 240.$$

Řešení těchto rovnic je následující:

$$Y_t = 314{,}286 \cdot 0{,}65^t + 685{,}714,$$

$$Y_t = -600 \cdot 0{,}85^t + 1600.$$

Dopočítáme rovnovážné hodnoty:

$$Y^* = 685{,}7143,$$

$$Y^* = 1600.$$

4.2 Rozšíření dynamického multiplikátoru

Dosud jsme předpokládali, že autonomní výdaje jsou konstantní v čase. Autonomní výdaje se však mohou v čase vyvíjet. V modelu proto nahradíme na pravé straně rovnice konstantu A funkcí A_t, která se mění v čase. Allen (1971) a Chiang (1993) popisují modely, kde se autonomní výdaje mění exponenciálně nebo geometrickou řadou. Jednou z mnoha možností je případ, kdy autonomní výdaje tvoří rostoucí geometrickou posloupnost při míře růstu r, tj. s kvocientem $(1+r)$, $(r > 0)$:

$$A_t = A_0 (1+r)^t.$$

V tomto případě dostaneme diferenční rovnici

$$Y_t - cY_{t-1} = A_0 (1+r)^t.$$

Vývoj autonomních výdajů geometrickou posloupností však neodpovídá skutečnosti.

V této práci uvažujeme, že se autonomní výdaje vyvíjejí lineárně. Předpis pro vývoj hodnot autonomních výdajů v čase získáme tak, že tyto hodnoty proložíme regresní přímkou. V našem případě hledáme regresní funkci ve tvaru

$$\widetilde{y} = c_1 + c_2 x.$$

Neznámé parametry c_1 a c_2 určíme metodou nejmenších čtverců, která spočívá v hledání minima součtu druhých mocnin (čtverců) odchylek v_i. Platí:

$$\sum_{i=1}^{N} {v_i}^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \widetilde{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - c_1 - c_2 x_i\right)^2 = \Phi(c_1; c_2).$$

Funkce $\Phi(c_1;c_2)$ je tzv. kriteriální funkce. U této funkce hledáme minimum, tak, že první parciální derivace kriteriální funkce podle proměnných c_j položíme rovny nule. Tedy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 2\sum_{i=1}^{N}(y_i - c_1 - c_2 x_i)\cdot(-1) = 0 ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = 2\sum_{i=1}^{N}(y_i - c_1 - c_2 x_i)\cdot(-x_i) = 0 .$$

Řešením je tzv. soustava normálních rovnic:

$$N \cdot c_1 + c_2 \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i ,$$

$$c_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + c_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i .$$

Na pravé straně diferenční rovnice dostaneme obecně výraz $a.t + b$, což je mnohočlen prvního stupně. Diferenční rovnice má tvar:

$$Y_{t+1} - cY_t = a \cdot t + b .$$

Nejdříve vypočítáme obecné řešení zkrácené rovnice:

$$Y_{t+1} - cY_t = 0 ,$$

$$z - c = 0 ,$$

$$\hat{Y}_t = k \cdot c^t .$$

Provedeme odhad partikulárního řešení podle tvaru pravé strany.

$$\overline{Y}_t = at + b ,\ \overline{Y}_{t+1} = a \cdot (t+1) + b ,$$

$$a(t+1) + b - c \cdot (a.t + b) = c_1 \cdot t + c_2 ,$$

$$a \cdot t + a + b - c \cdot a \cdot t - c \cdot b = c_1 \cdot t + c_2 ,$$

$$(1-c) \cdot a \cdot t + a + (1-c) \cdot b = c_1 \cdot t + c_2 .$$

Pro výpočet koeficientů a a b použijeme metodu neurčitých koeficientů. Za t dosadíme libovolné konstanty a dostaneme 2 rovnice o 2 neznámých (a, b):

$$t = 0 : a + (1-c) \cdot b = c_2 ,$$

$$t = 1 : (1-c) \cdot a + a + (1-c) \cdot b = c_1 + c_2 .$$

Výraz $a + (1-c) \cdot b$ nahradíme za c_2 a dostaneme lineární rovnici o jedné neznámé a:

$$(1-c) \cdot a + c_2 = c_1 + c_2 ,$$

$$a = \frac{c_1}{1-c} .$$

Vypočtenou neznámou a dosadíme do rovnice $a+(1-c)\cdot b=c_2$ a získáme neznámou b

$$b=\frac{c_2}{1-c}-\frac{c_1}{(1-c)^2}\,.$$

Partikulární řešení nezkrácené rovnice má tvar

$$\overline{Y}_t=\frac{c_1}{1-c}t+\left[\frac{c_2}{1-c}-\frac{c_1}{(1-c)^2}\right].$$

Celkové řešení diferenční rovnice dostaneme jako součet obecného a partikulárního řešení:

$$Y_t=\hat{Y}_t+\overline{Y}_t\,,$$

$$Y_t=k\cdot c^t+\frac{c_1}{1-c}t+\left[\frac{c_2}{1-c}-\frac{c_1}{(1-c)^2}\right]. \tag{4.7}$$

4.3 Ověření matematického modelu na reálných datech

Nejen v současnosti se ozývají hlasy odpůrců používání matematických modelů v ekonomii. Hlavním cílem mé práce je ověřit model multiplikátoru, ve kterém se autonomní výdaje v čase mění, na skutečných datech. Potřebná data jsme nalezli na webových stránkách České národní banky v systému časových řad ARAD. Používáme kvartální data od roku 1995 do roku 2010. Údaje jsou uváděny v milionech Kč. Jelikož pracujeme ve dvousektorové ekonomice, hrubý domácí produkt vypočtený podle výdajové metody není složený ze čtyř částí ($Y=C+I+G+NX$), ale jen ze dvou, tj. výdajů na konečnou spotřebu domácností a investičních výdajů firem ($Y=C+I$). HDP tedy očišťujeme od vládních výdajů G a čistého exportu NX. Reálná data používáme do dvou různých modelů, nejdříve do modelu, kde jsou autonomní výdaje dány konstantou, a dále do modelu, kde se autonomní výdaje v čase vyvíjí.

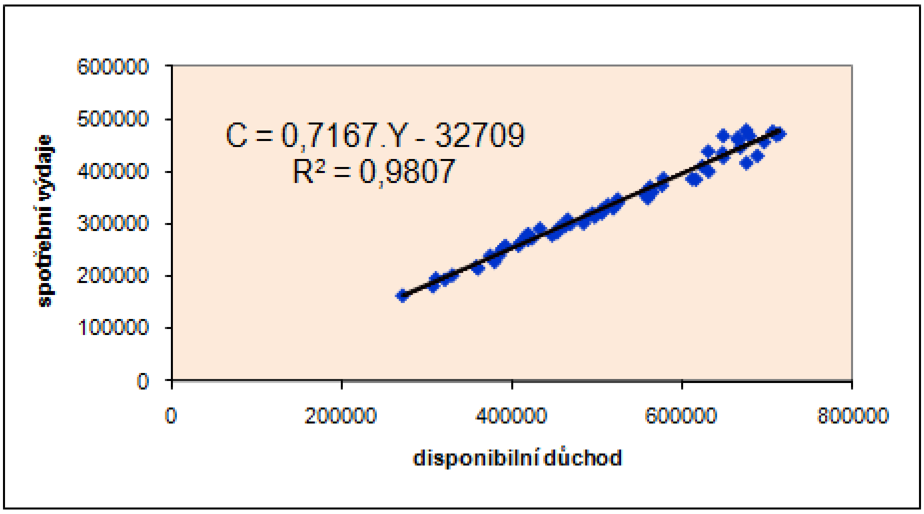
4.4 Model s konstantou na pravé straně

V tomto modelu předpokládáme, že se autonomní výdaje v čase nemění, na pravé straně diferenční rovnice je konstanta (mnohočlen nultého stupně).

Abychom mohli model vytvořit a následně vyřešit, potřebujeme k tomu tyto údaje:

1. mezní sklon ke spotřebě c,
2. autonomní výdaje A,
3. hodnotu důchodu v čase $t=0$, tj. Y_0.

Hodnotu mezního sklonu ke spotřebě vypočteme tak, že na vodorovnou osu naneseme hodnoty skutečného disponibilního důchodu[1] Y a na svislou osu hodnoty spotřebních výdajů. Daty proložíme lineární regresní funkci. Sklon této regresní přímky udává mezní sklon ke spotřebě. Vycházíme z Grafu 4.1: Funkce spotřebních výdajů.



Graf 4.4: Výpočet mezního sklonu ke spotřebě

Koeficient determinace regresní přímky má hodnotu 0,98, regresní přímka téměř dokonale vystihuje vztah mezi spotřebou a důchodem. Danou regresní přímkou můžeme vysvětlit 98 % závislosti, zbývající 2 % jsou dány náhodnou složkou.

Nyní již sestavíme a vyřešíme matematický model, který má vstupní údaje A a Y_0 získané z databáze časových řad ARAD České národní banky:

$$c = 0{,}72, \qquad A = 108532, \qquad Y_0 = 272612.$$

Diferenční rovnice má tvar

$$Y_{t+1} - 0{,}72Y_t = 108532.$$

Vypočítaný rovnovážný důchod:

$$Y^* = \frac{1}{1-0{,}72}.108532,$$

$$Y^* = 387614.$$

[1] Soukup (2007) získává disponibilní důchod YD tak, že od důchodu Y odečte autonomní daně T_a, důchodové daně tY a přičte transferové výdaje TR $(YD = Y - T_a - tY + TR)$. My však pracujeme ve dvousektorové ekonomice bez vlivu vlády, která vybírá daně a poskytuje transfery, skutečný důchod Y je tedy roven disponibilnímu důchodu YD.

Dosazením známých údajů do rovnice (4.6) dostaneme řešení diferenční rovnice:

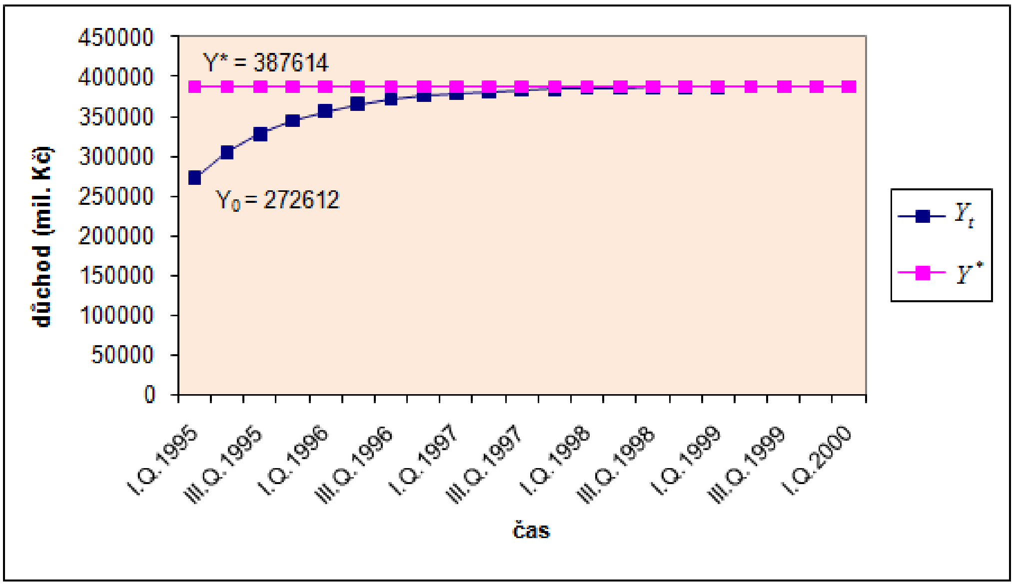
$$Y_t = -115002.0{,}72^t + 387614 . \qquad (4.8)$$

Hodnoty důchodu Y_t v čase vypočítané v programu MS Excel sestavíme do Tabulky 4.1.

Období	Y_t
I.Q.1995	272612
II.Q.1995	304813
III.Q.1995	327997
IV.Q.1995	344690
I.Q.1996	356709
II.Q.1996	365362
III.Q.1996	371593
IV.Q.1996	376079
I.Q.1997	379309
II.Q.1997	381634
III.Q.1997	383308
IV.Q.1997	384514
I.Q.1998	385382
II.Q.1998	386007
III.Q.1998	386457
IV.Q.1998	386781
I.Q.1999	387014
II.Q.1999	387182
III.Q.1999	387303
IV.Q.1999	387390
I.Q.2000	387453

Tabulka 4.1: Kalkulace hodnot důchodu Y_t

V Grafu 4.5 vidíme, jak se skutečný důchod přibližuje k důchodu rovnovážnému.

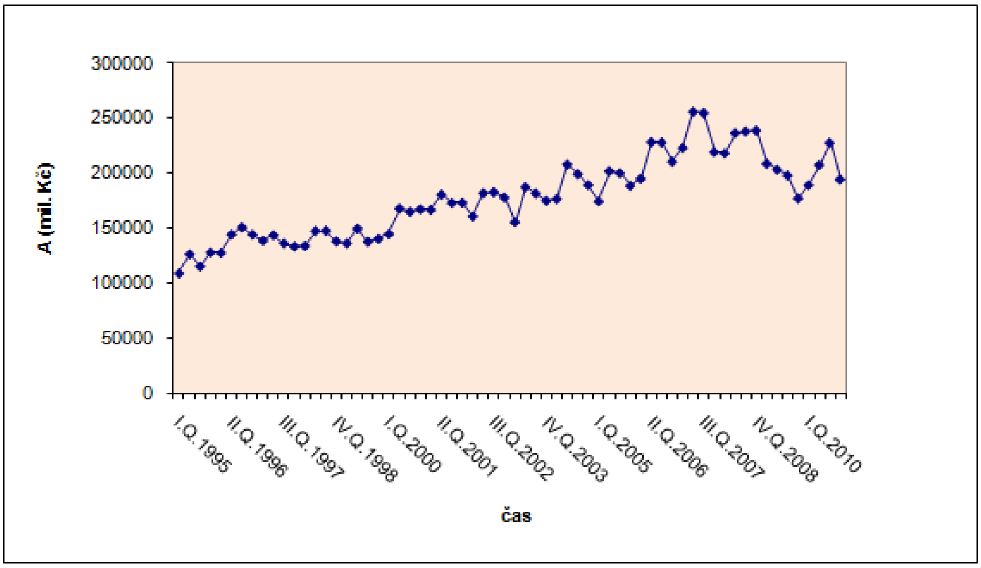


Graf 4.5: Dynamický multiplikátor, A = konstanta

Matematický model potvrzuje funkci multiplikátoru jako stabilizujícího prvku.

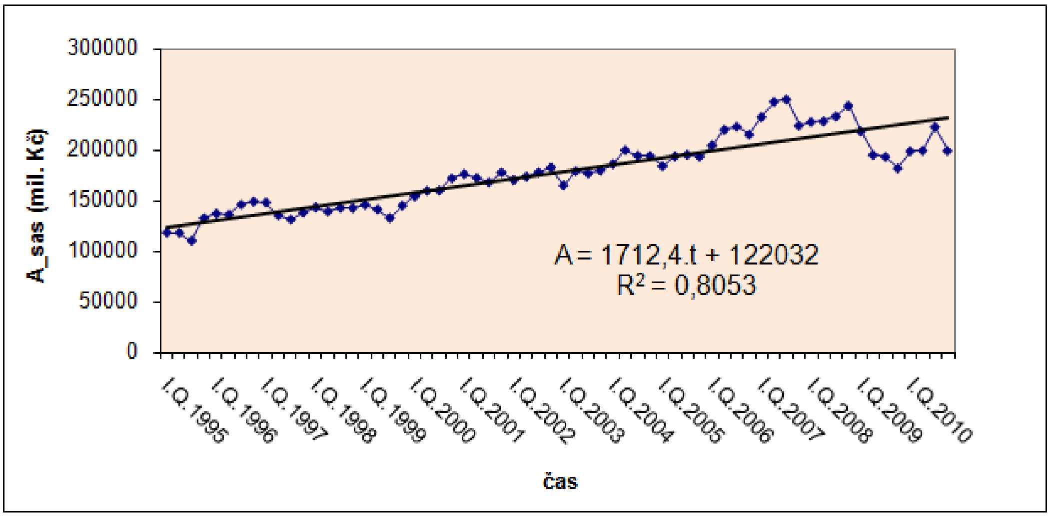
4.5 Model s lineárními autonomními výdaji

Nyní již uvažujeme, že se autonomní výdaje v čase lineárně mění. Tento model se více blíží realitě než model, kde byly autonomní výdaje konstantní. Vývoj autonomních výdajů, získaných z databáze časových řad ARAD za období 1. čtvrtletí 1995 – 4. čtvrtletí 2010, což podle Soukupa (2007) považujeme za velmi dlouhé období, je zobrazen v Grafu 4.6.



Graf 4.6: Vývoj autonomních výdajů

V grafu je zřejmé, že časová řada autonomních výdajů vykazuje sezónnost. Ve statistickém programu SPSS tedy časovou řadu očistíme. Použijeme aditivní dekompozici, čímž dostaneme čtyři složky – trendovou, cyklickou, sezónní a náhodnou. V práci použijeme složku, která je v programu SPSS označena jako SAS (Seasonal Adjusted Series). Sezónně očištěnými daty proložíme regresní přímku, jak ukazuje Graf 4.7.



Graf 4.7: Vývoj sezónně očištěných autonomních výdajů

Autonomní výdaje mají rostoucí trend. Z velikosti koeficientu determinace $R^2 = 0{,}8053$ můžeme usoudit, že regresní přímka vystihuje vývoj autonomních výdajů na 80 %, 20 % je dáno náhodnou složkou.

Aritmetická posloupnost, která představuje vývoj autonomních výdajů v daném období, je speciální pravou stranou diferenční rovnice, kde dostaneme mnohočlen prvního stupně. Mezní sklon ke spotřebě c již známe z předchozího modelu. Počáteční hodnota důchodu Y_0 má hodnotu 272 612 mil. Kč. Diferenční rovnice má tvar

$$Y_{t+1} - 0{,}72 \cdot Y_t = 1700 \cdot t + 120000.$$

Obecné řešení její zkrácené rovnice je posloupnost

$$\hat{Y}_t = k \cdot 0{,}72^t.$$

Určíme partikulární řešení nezkrácené rovnice:

$$\overline{Y}_t = \frac{1700}{0{,}28} \cdot t + \left(\frac{120000}{0{,}28} - \frac{1700}{0{,}0784} \right),$$

$$\overline{Y}_t = 6071 \cdot t + 406888.$$

Řešení diferenční rovnice dostaneme ve tvaru

$$Y_t = k \cdot 0{,}72^t + 6071 \cdot t + 406888.$$

Konstantu k dopočteme z počáteční podmínky, tj. skutečného důchodu na počátku sledovaného období t_0, tj. 1. čtvrtletí roku 1995:

$$t = 0 : Y_0 = 272612,$$

$$271612 = k \cdot 0{,}72^0 + 6071 \cdot 0 + 406888,$$

$$k = -135276.$$

Partikulárním řešením diferenční rovnice, resp. funkčním předpisem posloupnosti, je vztah

$$Y_t = -135276 \cdot 0{,}72^t + 6071 \cdot t + 406888. \tag{4.9}$$

Vzhledem k tomu že se v čase mění autonomní výdaje, mění se i hodnota rovnovážného důchodu. Předpis pro vývoj rovnovážného důchod vypočteme podle vztahu

$$Y_t^* = \frac{1}{1-c} \cdot A_t. \tag{4.10}$$

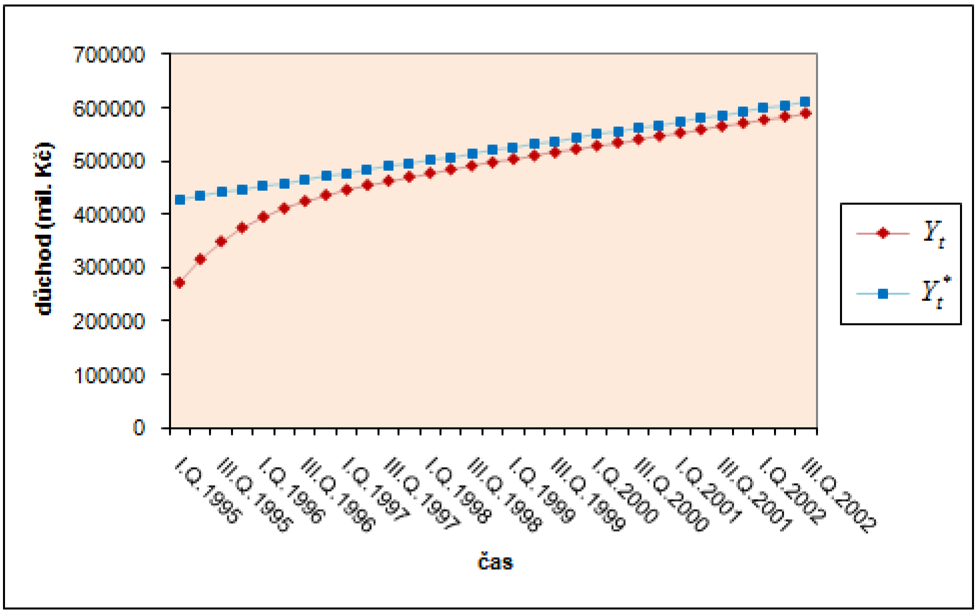
Do rovnice (4.9) dosadíme známé údaje:

$$Y_t^* = \frac{1}{1-0{,}72} \cdot (1700 \cdot t + 120000),$$

$$Y_t^* = 6071 \cdot t + 428571.$$

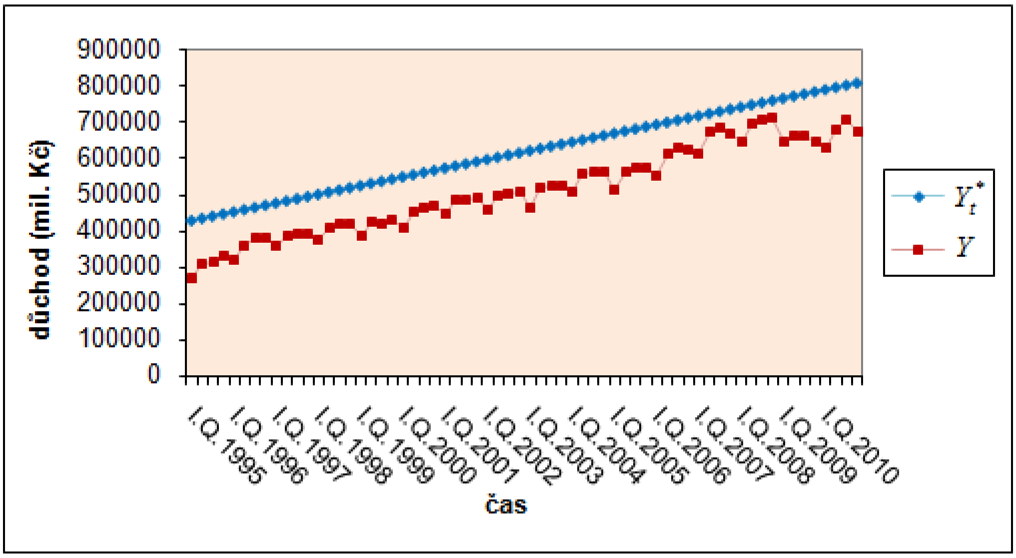
Stejně jako v případě, kdy byly autonomní výdaje konstantní, provedeme kalkulaci vývoje důchodu Y_t v čase. Musíme však vypočítat i hodnoty rovnovážného důchodu, protože ten se v čase lineárně mění. Kalkulace skutečného důchodu, vypočteného pomocí matematického modelu, a rovnovážného důchodu za období 1. čtvrtletí 1995 – 4. čtvrtletí 2010 je zobrazena v Příloze č. 2.

Vývoj skutečného důchodu Y_t vypočteného pomocí matematického modelu a rovnovážného důchodu Y_t^* vyjádříme graficky. V Grafu 4.8 vidíme, jak se skutečný modelovaný důchod přibližuje k důchodu rovnovážnému.



Graf 4.8: Vývoj skutečného a rovnovážného důchodu

Abychom mohli posoudit věrohodnost matematického modelu, musíme porovnat hodnoty odhadované modelem s reálnými hodnotami. V modelu předpokládáme, že se skutečný důchod v čase přibližuje k důchodu rovnovážnému. Zdali tento předpoklad platí i v reálné ekonomice můžeme posoudit v Grafu 4.9. Rozdíl oproti Grafu 4.8 je v tom, že zaměníme místo hodnot odhadnutých řešením diferenční rovnice hodnoty naměřené.



Graf 4.9: Odhadovaný rovnovážný důchod a reálný (naměřený) důchod

Reálný důchod, složený ze spotřebních výdajů domácností a investičních výdajů firem, se odhadované rovnovážné hodnotě nejvíce přiblížil v letech 2007 - 2008.

Pomocí ekonomicko-matematického modelu jsme za použití dat, získaných z ekonomické reality, potvrdili hypotézu, že multiplikátor má v ekonomice stabilizující funkci.

Řešení diferenční rovnice, tj. vztah

$$Y_t = -135276 \cdot 0{,}72^t + 6071 \cdot t + 406888\,,$$

můžeme použít pro predikci důchodu ex post i ex ante. Když chceme odhadnout hodnotu důchodu např. pro 1. čtvrtletí roku 2011, za neznámou t dosadíme číslo 64. Musíme však mít na paměti, že v modelu nebereme v úvahu sektory vláda a zahraniční obchod.

Závěr

V této bakalářské práci byly studovány diskrétní matematické modely v ekonomii využívající diferenční rovnice. Teoretická část práce je obsažena v úvodních dvou kapitolách. V první kapitole jsme uvedli některé důležité pojmy z oblasti dynamických modelů. Teorie diferenčních rovnic, vycházející z teorie posloupností, je popsána ve druhé kapitole. Cílem práce není vyčerpávající popis teorie diferenčních rovnic, proto neuvádíme důkazy jednotlivých vět, pouze odkazujeme na literaturu, kde je lze nalézt.

Praktickou částí práce byla aplikace diferenčních rovnic v ekonomických modelech v mikroekonomii a makroekonomii. Využili jsme nehomogenní lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty 1. řádu. Modely jsme analyzovali jak z hlediska ekonomického, tak z hlediska matematického. Zajímalo nás, jaký vliv na celkový výsledek bude mít změna vstupních parametrů modelu. Pro vyjádření možných výsledků vývoje sledované veličiny v čase jsme využili grafické znázornění. Grafy byly vytvořeny pomocí dat z kalkulačních tabulek vytvořených v aplikaci MS Excel.

Jádrem této práce bylo ověření opodstatněnosti použití matematických modelů s využitím diferenčních rovnic v ekonomii na modelu působení multiplikátoru pomocí reálných dat. Naplnění modelu reálnými daty z časových řad ARAD České národní banky a jeho následné vyřešení potvrdilo předpoklad, že multiplikátor je v ekonomice stabilizující prvek a skutečný důchod se v probíhajícím čase přibližuje k důchodu rovnovážnému. Data získaná z časových řad ARAD České národní banky umožňují sestavit i model rozšířený o vládní sektor a zahraniční obchod.

Seznam použité literatury

ALLEN, R. D. G. *Matematická ekonomie*. Přel. M. Černý. Praha: Academia, 1971. 782 s.

CHIANG, ALFA C. *Fundamental methods of mathematical economics*. New York: McGraw-Hill, 2005. 788 s. ISBN: 0-07-010813-7.

FIALA, J.; DLOUHÝ, M. *Základy kvantitativní ekonomie a ekonomické analýzy*. Praha: Oeconomica, 2006. 165 s. ISBN 80-245-1087-1.

GANDOLFO, G. *Economic dynamics*. Berlin: Springer – Verlag, 1997. 829 s. ISBN 3-540-62760-X.

GLÜCKAUFOVÁ, D. *Diferenční rovnice s přihlédnutím k jejich použití v ekonomii*. Praha: Ekonomicko-matematická laboratoř při Ekonomickém ústavu ČSAV, 1966.

MACHLUP, F. *Economic Semantics*. 2nd ed. New Jersey: Transaction publishers, 1991. ISBN 0-88738-836-1.

MAŘÍK, R. *Diferenciální a diferenční rovnice*. 1. vyd. Brno: MZLU, 2005. 79 s. ISBN 80-7157-754-5.

PRÁGEROVÁ, A. *Diferenční rovnice*. Praha: SNTL, 1971. 115 s.

SAMPSON, M. *Introduction to Mathematical Economics: Part 2*. Loglinear Publications [online]. 2001 [cit. 2001-01-02]. Dostupné z WWW: < http://www.loglinear.com/>.

SAMUELSON, P. A.; NORDHAUS, W. D. *Ekonomie*. Praha: Nakladatelství Svoboda, 1995. 1012 s. ISBN 80-205-0494-X.

SOUKUP, J. *Makroekonomie: moderní přístup*. Praha: Management Press, 2007. 528 s. ISBN 978-807-2611-744.

ŠKRÁŠEK, J.; TICHÝ, Z. *Základy aplikované matematiky II*. Praha: SNTL, 1986. 896 s.

Elektronické zdroje

Česká národní banka [online]. 2003 [cit. 2011-03-04]. ARAD - Systém časových řad. Dostupné z WWW: <http://www.cnb.cz/docs/ARADY/HTML/index.htm>.

Prohlášení o využití výsledků bakalářské práce

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo;
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně, ke své vnitřní potřebě, bakalářskou práci užít (§ 35 odst. 3);
- souhlasím s tím, že jeden výtisk diplomové (bakalářské) práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že bibliografické údaje o bakalářské práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO;
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- bylo sjednáno, že užít své dílo, bakalářskou práci, nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě dne 2. května 2011

…………………………..

Jan Manďák

Adresa trvalého pobytu studenta:
Václava Jiříkovského 176/56, 700 30 Ostrava

Seznam příloh

Příloha č. 1

Období	C	I	I_sas	Období	C	I	I_sas
I.Q.1995	164080	108532	117845	I.Q.2003	309908	155508	164821
II.Q.1995	181927	126279	117675	II.Q.2003	331321	187641	179037
III.Q.1995	196815	115031	109844	III.Q.2003	342462	181895	176708
IV.Q.1995	203157	127842	132319	IV.Q.2003	348779	175218	179695
I.Q.1996	194642	127420	136733	I.Q.2004	329227	176784	186097
II.Q.1996	216122	144375	135771	II.Q.2004	351025	208424	199820
III.Q.1996	228801	150955	145768	III.Q.2004	364267	199573	194386
IV.Q.1996	234610	144266	148743	IV.Q.2004	372374	189588	194065
I.Q.1997	219664	138642	147955	I.Q.2005	337945	174614	183927
II.Q.1997	241415	143688	135084	II.Q.2005	362153	202288	193684
III.Q.1997	253607	136137	130950	III.Q.2005	375635	200452	195265
IV.Q.1997	259078	133390	137867	IV.Q.2005	388753	188853	193330
I.Q.1998	240767	133796	143109	I.Q.2006	359971	195338	204651
II.Q.1998	260404	147493	138889	II.Q.2006	387062	228722	220118
III.Q.1998	271357	147643	142456	III.Q.2006	402351	228392	223205
IV.Q.1998	279080	137965	142442	IV.Q.2006	412421	210790	215267
I.Q.1999	252062	136208	145521	I.Q.2007	387981	223470	232783
II.Q.1999	274332	149629	141025	II.Q.2007	418716	256484	247880
III.Q.1999	281769	137652	132465	III.Q.2007	432419	255438	250251
IV.Q.1999	292541	140285	144762	IV.Q.2007	448427	219685	224162
I.Q.2000	265395	144684	153997	I.Q.2008	429346	218569	227882
II.Q.2000	284951	168048	159444	II.Q.2008	458731	237099	228495
III.Q.2000	297344	164992	159805	III.Q.2008	472029	238567	233380
IV.Q.2000	301550	167392	171869	IV.Q.2008	474433	239406	243883
I.Q.2001	280356	166851	176164	I.Q.2009	437979	209183	218496
II.Q.2001	303134	180824	172220	II.Q.2009	462134	203629	195025
III.Q.2001	315592	173099	167912	III.Q.2009	466310	198372	193185
IV.Q.2001	321234	173271	177748	IV.Q.2009	470503	177305	181782
I.Q.2002	295362	160783	170096	I.Q.2010	440757	189467	198780
II.Q.2002	315174	182055	173451	II.Q.2010	470626	207950	199346
III.Q.2002	322706	182933	177746	III.Q.2010	477870	228092	222905
IV.Q.2002	329113	178186	182663	IV.Q.2010	480213	194651	199128

Příloha č. 2

Období	Y_t	Y_t^*	Období	Y_t	Y_t^*
I.Q.1995	271612	428571	I.Q.2003	601156	622843
II.Q.1995	315560	434642	II.Q.2003	607228	628914
III.Q.1995	348903	440713	III.Q.2003	613300	634985
IV.Q.1995	374610	446784	IV.Q.2003	619372	641056
I.Q.1996	394818	452855	I.Q.2004	625443	647127
II.Q.1996	411068	458926	II.Q.2004	631514	653198
III.Q.1996	424468	464997	III.Q.2004	637585	659269
IV.Q.1996	435816	471068	IV.Q.2004	643657	665340
I.Q.1997	445686	477139	I.Q.2005	649728	671411
II.Q.1997	454493	483210	II.Q.2005	655799	677482
III.Q.1997	462533	489281	III.Q.2005	661870	683553
IV.Q.1997	470022	495352	IV.Q.2005	667941	689624
I.Q.1998	477115	501423	I.Q.2006	674012	695695
II.Q.1998	483921	507494	II.Q.2006	680083	701766
III.Q.1998	490521	513565	III.Q.2006	686154	707837
IV.Q.1998	496973	519636	IV.Q.2006	692225	713908
I.Q.1999	503318	525707	I.Q.2007	698296	719979
II.Q.1999	509587	531778	II.Q.2007	704367	726050
III.Q.1999	515800	537849	III.Q.2007	710438	732121
IV.Q.1999	521974	543920	IV.Q.2007	716509	738192
I.Q.2000	528118	549991	I.Q.2008	722580	744263
II.Q.2000	534242	556062	II.Q.2008	728651	750334
III.Q.2000	540352	562133	III.Q.2008	734722	756405
IV.Q.2000	546450	568204	IV.Q.2008	740793	762476
I.Q.2001	552541	574275	I.Q.2009	746864	768547
II.Q.2001	558626	580346	II.Q.2009	752935	774618
III.Q.2001	564708	586417	III.Q.2009	759006	780689
IV.Q.2001	570786	592488	IV.Q.2009	765077	786760
I.Q.2002	576862	598559	I.Q.2010	771148	792831
II.Q.2002	582937	604630	II.Q.2010	777219	798902
III.Q.2002	589011	610701	III.Q.2010	783290	804973
IV.Q.2002	595084	616772	IV.Q.2010	789361	811044